Problema 987. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC y un punto P, se consideran el baricentro Q del triángulo BCP y los puntos Q_a, Q_b y Q_c simétricos del punto Q con respecto a los puntos A, B y C, respectivamente. Probar que:

① $(Q_aQ_bQ_c) = 4(ABC)$

② Los triángulos $Q_aQ_bQ_c$ y ABC son semejantes, con razón de semejanza igual a 2.

③ El baricentro G del triángulo ABC, el baricentro Q del triángulo BCP y el baricentro T del triángulo $Q_aQ_bQ_c$ están alineados y, además, el punto G es el punto medio del segmento TQ.

Solución:

① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P = (u : v : w)$ $(u, v, w \in \mathbb{R})$, como el baricentro del triángulo BCP es:

$$Q = (u : u + 2v + w : u + v + 2w)$$

entonces:

$$\begin{cases} Q_a = (5u + 6v + 6w : -u - 2v - w : -u - v - 2w) \\ Q_b = (-u : 5u + 4v + 5w : -u - v - 2w) \\ Q_c = (-u : -u - 2v - w : 5u + 5v + 4w) \end{cases}$$

por lo que:

$$\frac{(Q_aQ_bQ_c)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 5u + 6v + 6w & -u - 2v - w & -u - v - 2w \\ -u & 5u + 4v + 5w & -u - v - 2w \\ -u & -u - 2v - w & 5u + 5v + 4w \end{vmatrix}}{27(u + v + w)^3} = 4$$

y, por tanto:

$$(Q_aQ_bQ_c) = 4(ABC)$$

② Como:

$$\begin{cases} Q_aQ_b^\infty = (1 : -1 : 0) = AB_\infty \\ Q_aQ_c^\infty = (1 : 0 : -1) = AC_\infty \\ Q_bQ_c^\infty = (0 : 1 : -1) = BC_\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_aQ_b \parallel AB \\ Q_aQ_c \parallel AC \\ Q_bQ_c \parallel AC \end{cases}$$

entonces, los triángulos $Q_aQ_bQ_c$ y ABC son semejantes. Además, como la razón de semjanza entre sus áreas es igual a 4, resulta que la razón de semejanza entre ellos es igual a 2.

③ Como:

$$T = (u + 2v + 2w : u + w : u + v)$$

y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & u+2v+w & u+v+2w \\ u+2v+2w & u+w & u+v \end{vmatrix} = 0$$

entonces, los puntos G, Q y T están alineados. Además, como los puntos Q y T tienen el mismo peso, el punto medio del segmento TQ es:

$$Q+T=(u:u+2v+w:u+v+2w)+(u+2v+2w:u+w:u+v)=(2u+2v+2w)=(1:1:1)=G$$