Pr. Cabri 988

Enunciado

Dados un triángulo ABC con baricentro G y triángulo LMN ceviano de éste, se consideran un punto P y su triángulo ceviano DEF:
1) Probar que existe una cónica 'Ω que pasa por los puntos L, M, N, D, E y F.
2) Probar que el centro Q de la cónica 'Ω está alineado con los puntos P y G y que, además, se verifica que PQ = 3QG.
3) Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que la cónica 'Ω sea tangente a alguno de los lados del triángulo ABC. Probar que esta cónica no puede ser tangente exactamente a dos de los lados del triángulo ABC e identificar esta cónica en el caso en que sea tangente a los tres lados.
4) Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que la cónica 'Ω sea degenerada, identificando todos los pares de rectas resultantes.
5) Indicar en qué regiones del plano la cónica 'Ω es una elipse, una hipérbola o una parábola.
6) Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que la cónica 'Ω sea una hipérbola equilátera o un par de rectas perpendiculares.
7) Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que el centro Q la cónica 'Ω esté situado sobre la circunelipse de Steiner del triángulo ABC.
8) Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que el centro Q la cónica 'Ω esté situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC.
9) Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que el centro Q la cónica 'Ω esté alineado con los puntos D y E.
10) Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que el punto Q' conjugado isotómico del centro Q de la cónica 'Ω esté situado sobre la recta paralela a BC pasando por los puntos medios de los segmentos AB y CA.
11) Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que la trilineal polar del centro Q la cónica 'Ω pase por el baricentro G del triángulo ABC.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

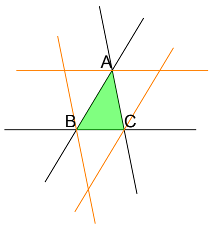
Consideremos un triángulo de vértices A(a,b), B(0,0) y C(1,0).

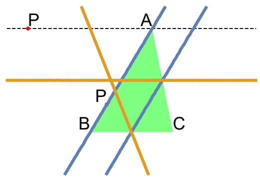
1) La cónica en cuestión es la cónica de los 9 puntos, K9P, de la que se trató en los problemas 954 y 957 (aquí extensamente) de esta misma página.

2) En el apartado 9 del citado problema 957 señalé que el centro de esta cónica puede expresarse como $K_9 = \frac{A+B+C+P}{4}$. Esto lo descubrí hace años pensando que era teórico aunque no lo vi citado en ninguna parte.
Como $K_9 = \frac{A+B+C+P}{4} \Rightarrow 4K_9$=A+B+C+P=3G+P, de donde resulta que K_9, G, P están alineados, con K_9 situado entre P y G y verificándose $|K_9P|=3|K_9G|$(1).

3) Repito lo dicho en respuesta a los apartados 3 y 4 del pr. 957.
Si K9P es tangente un lado, digamos BC, significa que los dos puntos de la cónica sobre ese lado, D y L, coinciden y la ceviana es una mediana. Es decir P está sobre alguna mediana. Si fuera tangente a dos tendríamos dos medianas que convergen en P=G. Y además determinan una tercera mediana y su correspondiente punto de tangencia. K9P sería entonces la cónica tritangente al triángulo por los puntos medios de sus lados, es decir la in-elipse de Steiner cuyo centro es precisamente G. Y ésta es la única K9P tritangente para un triángulo dado.

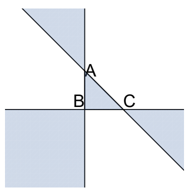
4) Calculamos el determinante de la matriz asociada a la ecuación de la cónica (2).
Su valor es
$\frac{1}{2} b\,(b-q)\,q\,(b\,(-1+p)-a\,q)\,(b\,p-a\,q)\,(b\,(-1+p)+q-a\,q)\,(b\,p+q-a\,q)$.
Aparte de anularse cuando b=0 (triángulo degenerado), se anula cuando P pertenece a algulna de las rectas determinadas por los lados o las paralelas a éstas por los vértices opuestos.

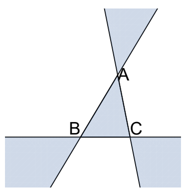




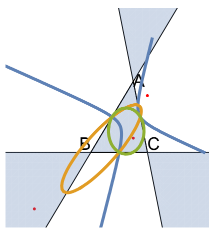
No es difícil percatarse que si P está sobre un lado, la cónica consta de dos rectas paralelas, ese lado y la recta que pasa por los puntos medios de los otros lados. Y si está en alguna de las otras 3 rectas, por ejemplo la paralela a BC por A, consta de dos rectas que se cortan. Una pasa por los puntos medios de AB y AC y la otra por los de PA y BC.

5) Ahora vamos a usar el triángulo con A(0,1).
En este caso la cónica tiene ecuación
$(-1+q)\,q\,x\,(-1+2\,x)+p^2\,y\,(-1+2\,y)-p\,(q\,(-1+2\,x)+y)\,(-1+2\,y)=0$.
Su invariante afín es 4pq(1-p-q), que solo se anula en casos degenerados lo que excluye la posibilidad de que Ω sea una parábola. La solución gráfica (3) de la inecuación 4pq(1-p-q)>0, se muestra en el siguiente dibujo



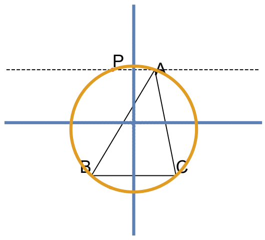


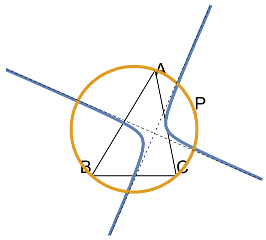
Si P(p,q) está en alguna de las regiones coloreadas se cumple 4pq(1-p-q)>0 y la cónica es una elipse. Si está en alguna de las otras es una hipérbola.



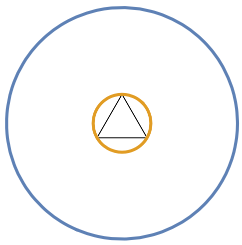
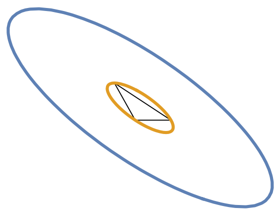
6) Para determinar cuando podemos obtener una hipérbola equilátera examinamos el invariante métrico.

Su valor es $-2\,(b\,p-b\,p^2-a\,q+a^2\,q+b^2\,q-b\,q^2)$ que coincide con la ecuación de la circunferencia circunscrita a ABC (con variables p, q).
Combinado con lo dicho en 4) tendremos dos rectas perpendiculares cuando P es alguna de las intersecciones de esta circunferencia con algún lado (excluyendo los vértices, donde la cónica no existe)



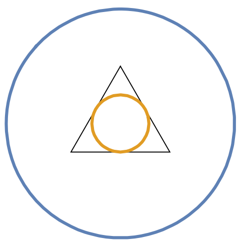
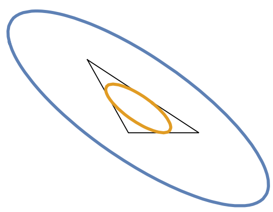


7) Nos bastará considerar un triángulo concreto, por ejemplo, el equilátero con A($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$).
El centro de la K9P es en este caso Q($\frac{1}{8}\,(3+2\,p)$, $\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}+2\,q\right)$).
La ex-elipse de Steiner (el circuncírculo) tiene de ecuación $-3\,x+3\,x^2-\sqrt{3}\,y+3\,y^2=0$. Si sustituímos las coordenadas de Q en esta ecuación obtenemos la del lugar geométrico buscado.
Resulta ser $-15-3\,p+3\,p^2-\sqrt{3}\,q+3\,q^2=0$, una circunferencia concéntrica con la anterior de radio 4 veces mayor.

En general el lugar geométrico pedido es una elipse homotética con la de Steiner con centro de homotecia el baricentro y razón de homotecia 4.

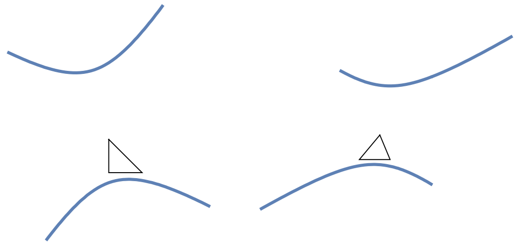
8) Procediendo como antes llegamos al mismo resultado cambiando la ex-elipse de Steiner por la in-elipse.

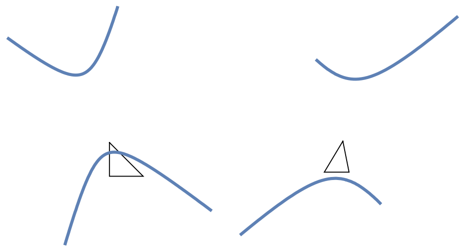
9) Para un triángulo con A(a,b), la recta DE tiene ecuación b-2bx+2ay=0. El centro de la cónica para un punto P(x,y) sabemos que es Q($\frac{1}{4}\,(1+a+x)$, $\frac{b+y}{4}$) que sustituído en la ecuación anterior nos da la ecuación b-bx+ay=0, que es la ecuación de una paralela a DE por C.

10) Consideremos el triángulo con A(0,1).
Su centro para P(x,y) es Q($\frac{1+x}{4}$, $\frac{1+y}{4}$) y su transformado isotómico

$Q\left(\left\{\frac{(1+y)\ (-2+x+y)}{-5+x^2+x\ (-1+y)+(-1+y)\ y},\ \frac{(1+x)\ (-2+x+y)}{-5+x^2+x\ (-1+y)+(-1+y)\ y}\right\}\right)$, que ha de estar situado sobre la recta $y=\frac{1}{2}$. Esto nos lleva a la relación $1-x+x^2+3y+xy-y^2=0$, que es la ecuación de una hipérbola. Y en general para un triángulo cualquiera el lugar buscado será cierta hipérbola.



11) Consideremos el triángulo con A(0,1).
Determinemos dos puntos de la polar trilineal (perspectriz) de P(x,y). Por ejemplo R=AB∩DE y S=BC∩EF.
Estos son $R=\left(\frac{1+x}{-1+2x+y},\ 0\right)$ y $S=\left(\frac{2(1+x)}{5+x},\ \frac{1+y}{5+x}\right)$. Les imponemos la condición de estar alineados con el baricentro $G=(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3})$,
Det[R-G,S-G]=0] que nos da la expresión $-3-3x+3x^2+5y+3xy-y^2=0$, ecuación de una hipérbola. Y en general para un triángulo cualquiera el lugar buscado será cierta hipérbola.



Notas

(1) Ésto lo señaló Saturnino Campos (en un correo a R. Barroso).
(2) Su ecuación es
$(-1+a)\,a\,q\,(q-2y)\,y+b^2\,(q\,(p-x)\,(-1+2x)-(-1+p)\,p\,y)+b\,(q^2\,(-a+x)\,(-1+2x)+2\,(a-p)\,q\,(-1+2x)\,y+2\,(-1+p)\,p\,y^2)$.
Y su matriz asociada

$$\begin{pmatrix} -2b^2q+2bq^2 & 2b(a-p)q & \frac{1}{2}(b^2q+2b^2pq-bq^2-2abq^2) \\ 2b(a-p)q & -2bp+2bp^2+2aq-2a^2q & \frac{1}{2}(b^2p-b^2p^2-2abq+2bpq-aq^2+a^2q^2) \\ \frac{1}{2}(b^2q+2b^2pq-bq^2-2abq^2) & \frac{1}{2}(b^2p-b^2p^2-2abq+2bpq-aq^2+a^2q^2) & -b^2pq+abq^2 \end{pmatrix}$$

(3) Su solución analítica con "Mathematica" es

```
Reduce[4 p q (1 - p - q) > 0] // Simplify
(q < 0 && (p < 0 || p + q > 1)) || (0 < q < 1 && p > 0 && p + q < 1) || (q > 1 && p + q > 1 && p < 0)
```