**Problema 988.** (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados un triángulo $ABC$ con baricentro $G$ y triángulo $LMN$ ceviano de éste, se consideran un punto $P$ y su triángulo ceviano $DEF$:

① Probar que existe una cónica $\Omega$ que pasa por los puntos $L$, $M$, $N$, $D$, $E$ y $F$.

② Probar que el centro $Q$ de la cónica $\Omega$ está alineado con los puntos $P$ y $G$ y que, además, se verifica que $PQ = 3QG$.

③ Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto $P$ para que la cónica $\Omega$ sea tangente a alguno de los lados del triángulo $ABC$. Probar que esta cónica no puede ser tangente exactamente a dos de los lados del triángulo $ABC$ e identificar esta cónica en el caso en que sea tangente a los tres lados.

④ Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto $P$ para que la cónica $\Omega$ sea degenerada, identificando todos los pares de rectas resultantes.

⑤ Indicar en qué regiones del plano la cónica $\Omega$ es una elipse, una hipérbola o una parábola.

⑥ Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto $P$ para que la cónica $\Omega$ sea una hipérbola equilátera o un par de rectas perpendiculares.

⑦ Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto $P$ para que el centro $Q$ la cónica $\Omega$ esté situado sobre la circunelipse de Steiner del triángulo $ABC$.

⑧ Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto $P$ para que el centro $Q$ la cónica $\Omega$ esté situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo $ABC$.

⑨ Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto $P$ para que el centro $Q$ la cónica $\Omega$ esté alineado con los puntos $D$ y $E$.

⑩ Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto $P$ para que el punto $Q^{\bullet}$ conjugado isotómico del centro $Q$ de la cónica $\Omega$ esté situado sobre la recta paralela a $BC$ pasando por los puntos medios de los segmentos $AB$ y $CA$.

⓫ Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto $P$ para que la trilineal polar del centro $Q$ la cónica $\Omega$ pase por el baricentro $G$ del triángulo $ABC$.

_Solución:_

① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo $ABC$, si $P = (u : v : w)$ $(u + v + w > 0)$, entonces:

$$\begin{cases} L = (0 : 1 : 1) \\ M = (1 : 0 : 1) \\ N = (1 : 1 : 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} D = (0 : v : w) \\ E = (u : 0 : w) \\ F = (u : v : 0) \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $L$, $M$, $N$, $D$ y $E$ es:

$$\Omega \equiv vwx^2 + uwy^2 + uvz^2 - w(u+v)xy - v(u+w)xz - u(v+w)yz = 0$$

pudiéndose comprobar, por simple sustitución, que el punto $F$ está situado sobre ella, ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación. Por tanto, esta cónica pasa por los puntos $L$, $M$, $N$, $D$, $E$ y $F$.

**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**

② Como el centro (conjugado de la recta del infinito) de la cónica $\Omega$ es el punto:

$$Q = (2u + v + w : u + 2v + w : u + v + 2w)$$

y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ 2u+v+w & u+2v+w & u+v+2w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & v-u & w-u \\ 2u+v+w & 2(v-u) & 2(w-u) \end{vmatrix} = 0$$

entonces, los puntos $G$, $P$ y $Q$ están alineados. Además, como el punto medio del segmento $GP$ es:

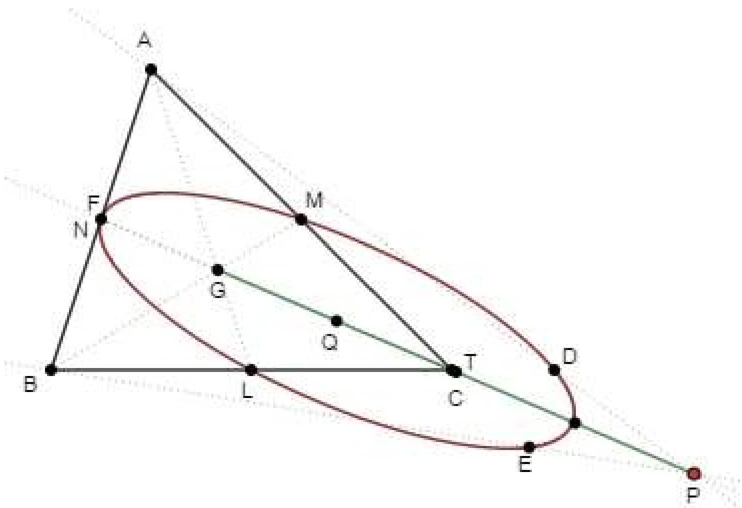
$$T = (4u + v + w : u + 4v + w : u + v + 4w)$$

y el punto medio del segmento $GT$ es:

$$Q = (2u + v + w : u + 2v + w : u + v + 2w)$$

entonces, $PQ = 3QG$.

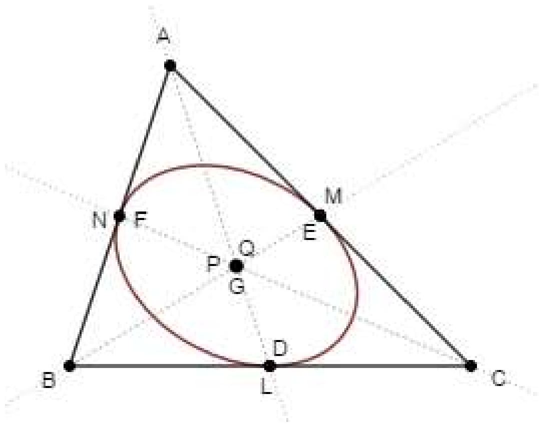
③ Para que la cónica $\Omega$ sea tangente a alguno de los lados del triángulo $ABC$, debe ocurrir que el punto medio de dicho lado y el pie de la ceviana del punto $P$ correspondiente a él coincidan, lo cual significa que el punto $P$ ha de estar situado sobre la mediana correspondiente al vértice opuesto a dicho lado.




Además, como el punto $P$ no puede estar situado exactamente en dos medianas del triángulo $ABC$, entonces, esta cónica no puede ser tangente exactamente a dos de los lados del triángulo $ABC$. Finalmente, si la cónica $\Omega$ es tangente a los tres lados del triángulo $ABC$, como los puntos de tangencia son los puntos medios de los segmentos que determinan sus vértices y $P = G = (1 : 1 : 1)$, entonces:

$$Q = (2 + 1 + 1 : 1 + 2 + 1 : 1 + 1 + 2) = (4 : 4 : 4) = (1 : 1 : 1) = G$$

y, por tanto, $\Omega$ es la inelipse de Steiner del triángulo $ABC$.




④ Como:

$$\begin{vmatrix} 2vw & -w(u+v) & -v(u+w) \\ -w(u+v) & 2uw & -u(u+w) \\ -v(u+w) & -u(u+w) & 2uv \end{vmatrix} = -4uvw(u+v)(u+w)(v+w)$$

entonces, la cónica $\Omega$ será degenerada cuando el punto $P$ esté situado sobre alguno de los tres lados del triángulo $ABC$ o sobre alguna de las rectas paralelas a sus lados pasando por el vértice opuesto. Además:

- Si el punto $P$ está situado sobre la recta $BC$, como $u = 0$, entonces, la ecuación de la cónica es:

$$\Omega \equiv x(x - y - z) = 0$$

y corresponde al par de rectas formado por la recta $BC$ y la recta paralela a ella pasando por los puntos medios de los segmentos $AB$ y $CA$.

- Si el punto $P$ está situado sobre la recta $CA$, como $v = 0$, entonces, la ecuación de la cónica es:

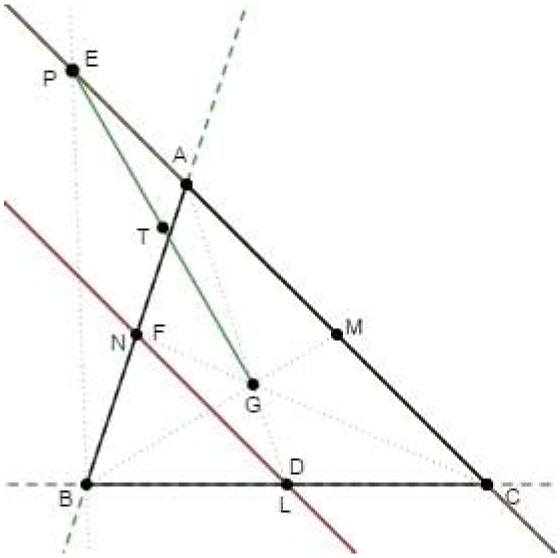
$$\Omega \equiv y(x - y + z) = 0$$

y corresponde al par de rectas formado por la recta $CA$ y la recta paralela a ella pasando por los puntos medios de los segmentos $AB$ y $BC$.

- Si el punto $P$ está situado sobre la recta $CA$, como $w = 0$, entonces, la ecuación de la cónica es:

$$\Omega \equiv z(x + y - z) = 0$$

y corresponde al par de rectas formado por la recta $AB$ y la recta paralela a ella pasando por los puntos medios de los segmentos $BC$ y $CA$.




- Si el punto $P$ está situado sobre la recta paralela a $AB$ pasando por el punto $C,$ como $u+v=0,$ entonces, la ecuación de la cónica es:

$$\Omega \equiv (x+y-z)(wx-wy+vz)=0$$

y corresponde al par de rectas formado por la recta paralela a $AB$ pasando por los puntos medios de los segmentos $BC$ y $CA$ y una recta secante pasando por el punto medio del segmento $AB.$

- Si el punto $P$ está situado sobre la recta paralela a $BC$ pasando por el punto $A,$ como $v+w=0,$ entonces, la ecuación de la cónica es:

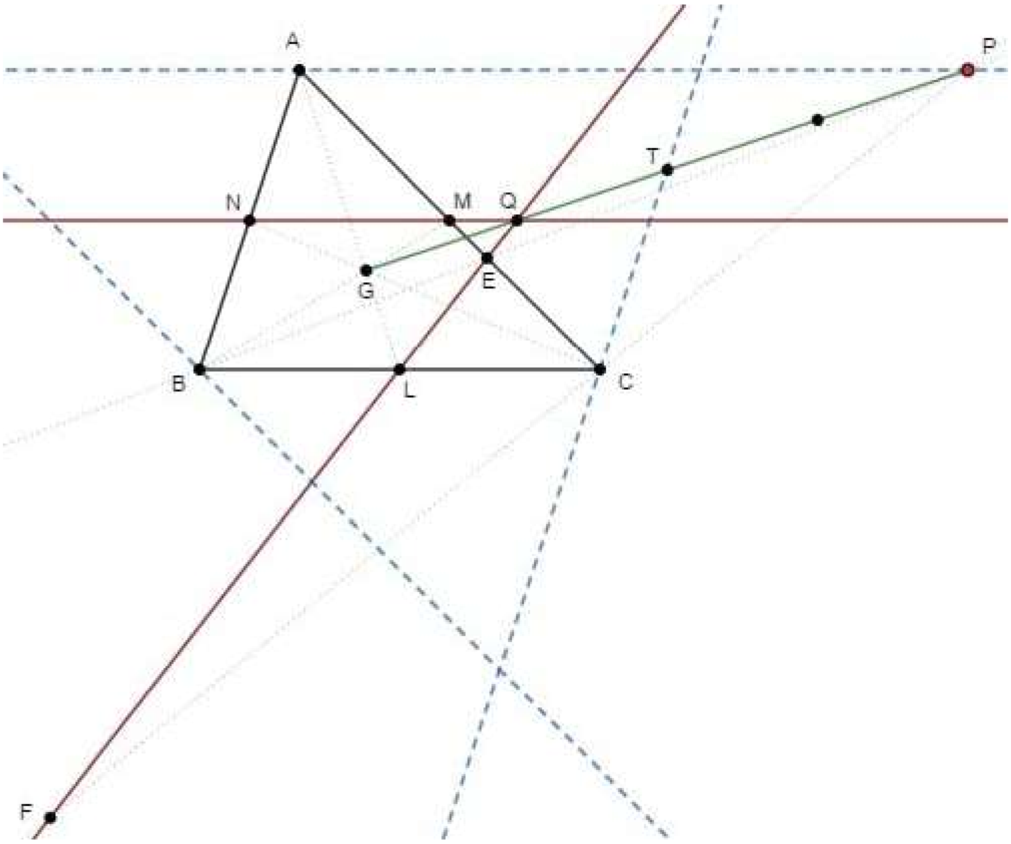
$$\Omega \equiv (x-y-z)(wx+uy-uz)=0$$

y corresponde al par de rectas formado por la recta paralela a $BC$ pasando por los puntos medios de los segmentos $AB$ y $CA$ y una recta secante pasando por el punto medio del segmento $BC.$

- Si el punto $P$ está situado sobre la recta paralela a $CA$ pasando por el punto $B,$ como $u+w=0,$ entonces, la ecuación de la cónica es:

$$\Omega \equiv (x-y+z)(vx+wy-vz)=0$$

y corresponde al par de rectas formado por la recta paralela a $CA$ pasando por los puntos medios de los segmentos $AB$ y $BC$ y una recta secante pasando por el punto medio del segmento $CA.$

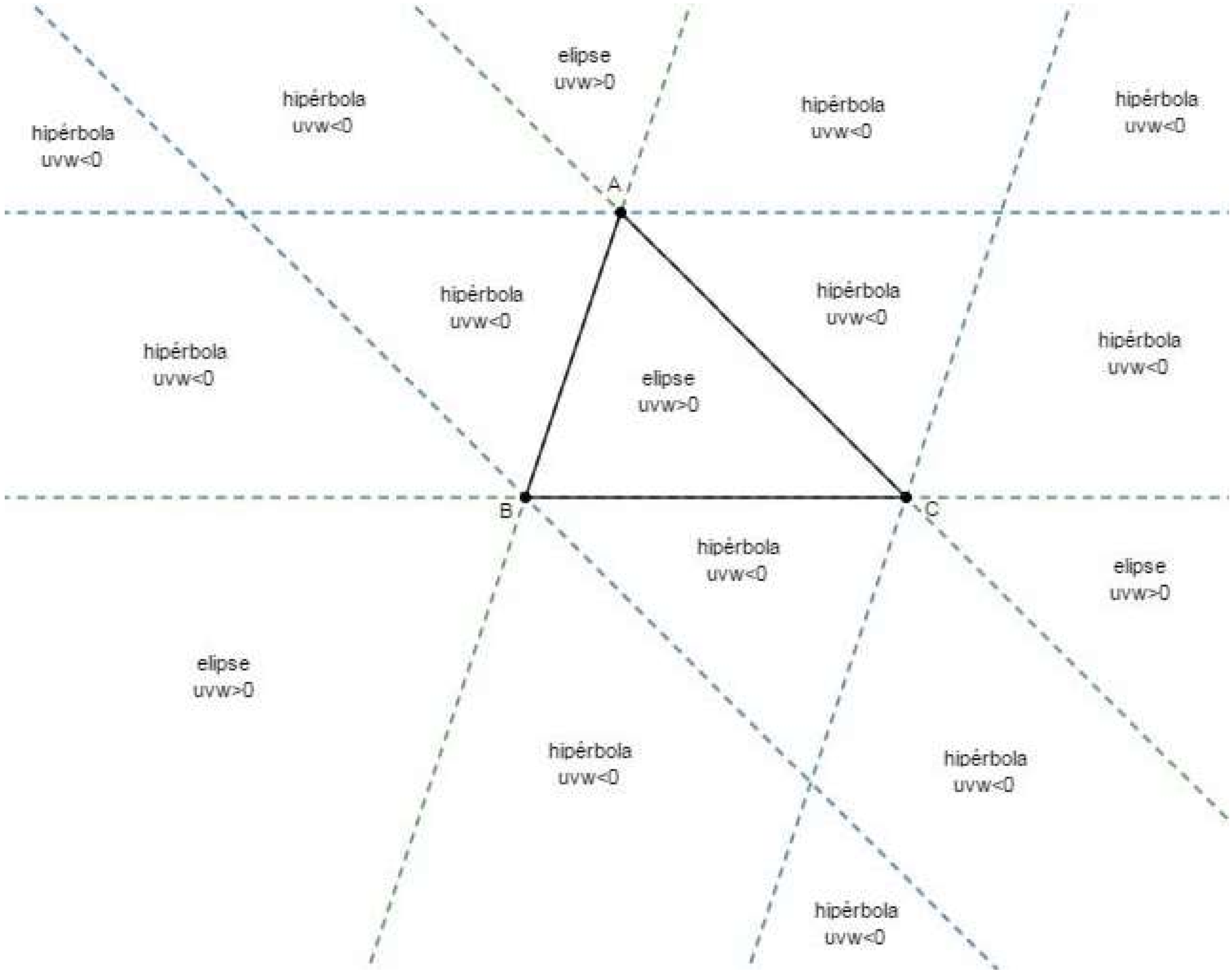



⑤ Como el discriminante de esta cónica es:

$$\Delta = -4uvw(u+v+w)$$

y $u+v+w>0,$ si esta cónica es no degenerada, ha de ocurrir que $uvw \neq 0,$ por lo que, para cualquier posición del punto $P$ nunca será una parábola. Además:

- Si $uvw > 0$ esta cónica será una elipse.
- Si $uvw < 0$ esta cónica será una hipérbola.




⑥ Como, cuando esta cónica es de tipo hiperbólico, sus puntos del infitnito son:

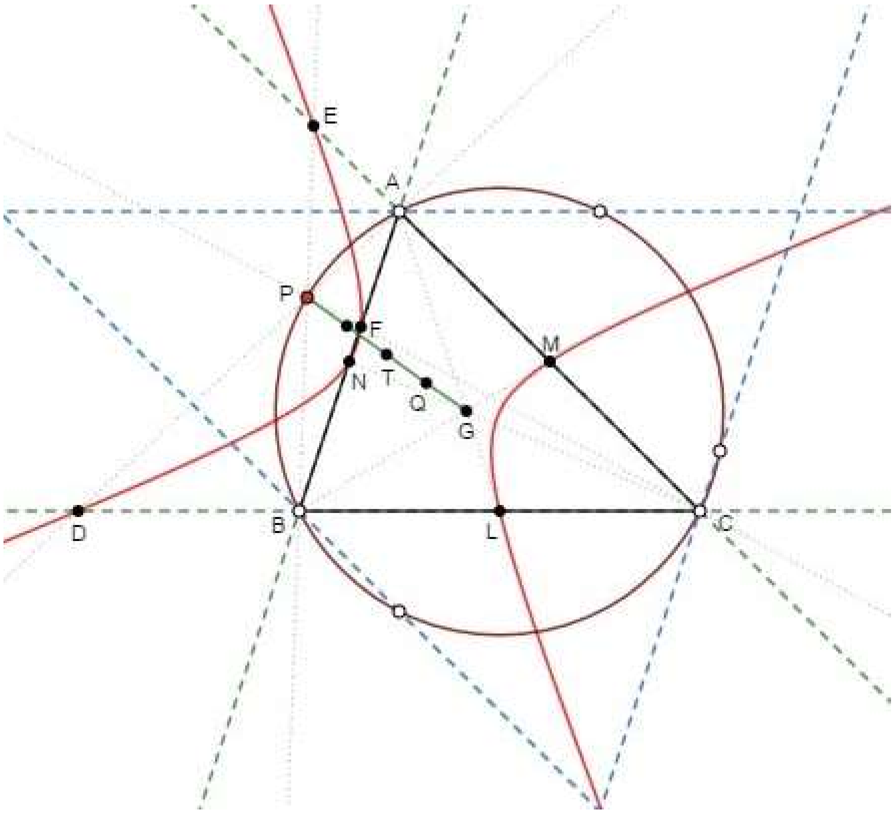
$$\begin{cases} I_1 = \left(u(v+w) : -uv - \sqrt{-uvw(u+v+w)} \; : -uv + \sqrt{-uvw(u+v+w)}\right) \\ I_2 = \left(u(v+w) : -uv + \sqrt{-uvw(u+v+w)} \; : -uv - \sqrt{-uvw(u+v+w)}\right) \end{cases}$$

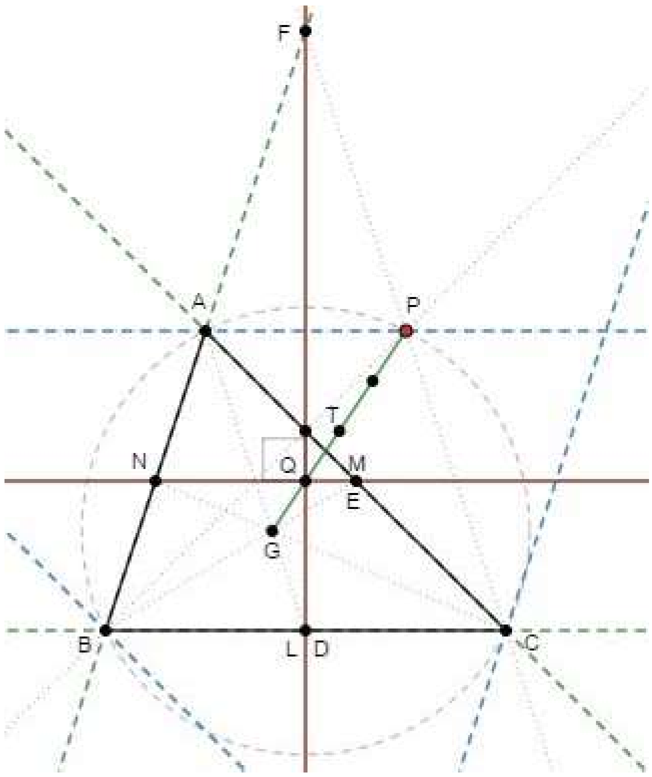
entonces:

$$I_1 \cdot I_2 = u(v+w)(c^2uv + b^2uw + a^2vw)$$

por lo que será una hipérbola equilátera cuando el punto $P$ esté situado sobre la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$, exceptuando los puntos de intersección de ésta con las rectas paralelas a los lados del triángulo pasando por el vértice opuesto y será un par de rectas perpendiculares cuando el punto $P$ esté situado en alguno de dichos puntos de intersección.

# TRIÁNGULOS CABRI




**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**

⑦ Como la ecuación de la circunelipse de Steiner del triángulo $ABC$ es:

$$xy + xz + yz = 0$$

imponiendo que el punto $Q$ esté situado sobre ella, obtenemos que:

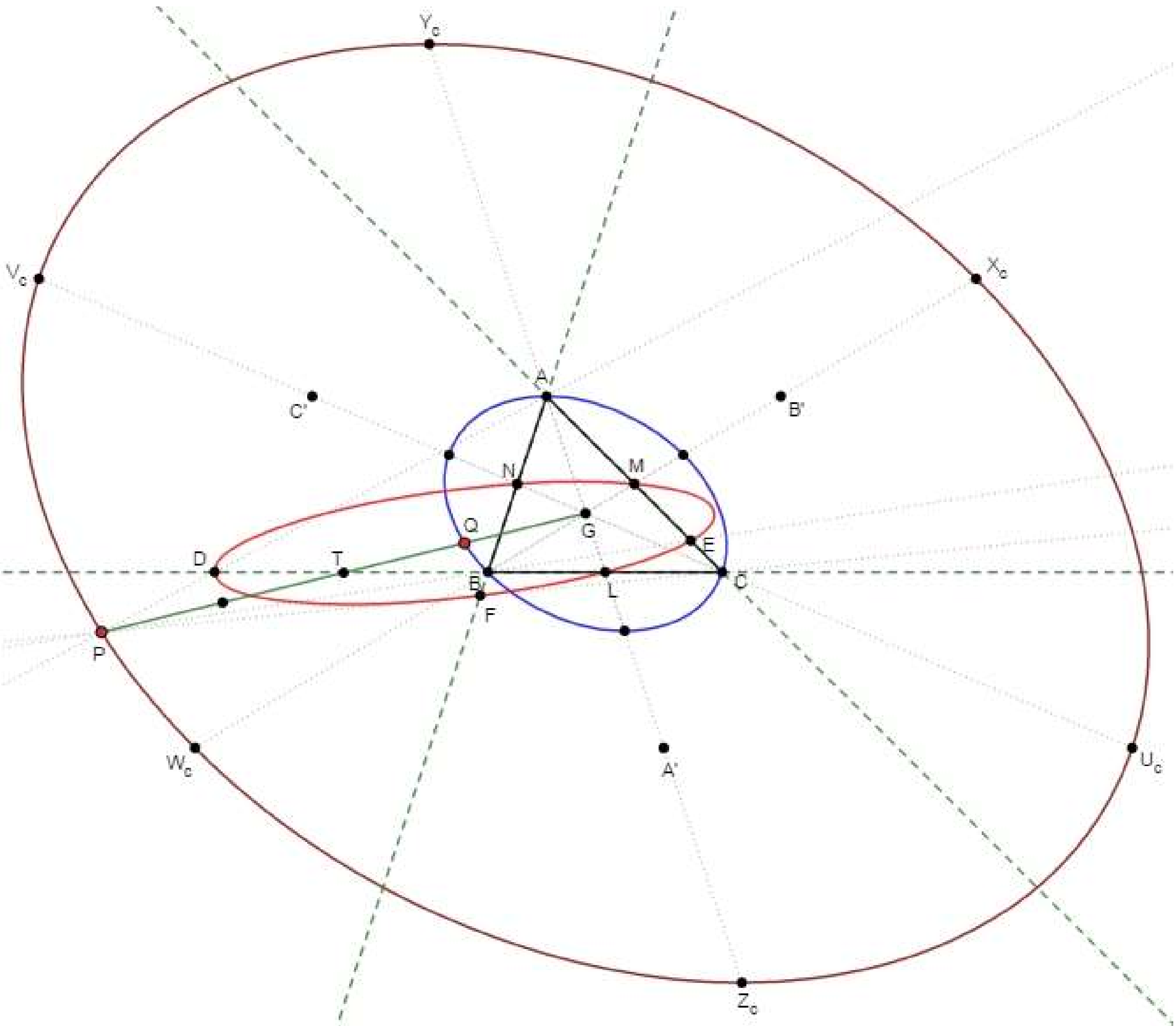
$$5u^2 + 5v^2 + 5w^2 + 11uv + 11uw + 11vw = 0$$

lo cual significa que el punto $P$ ha de estar situado sobre la cónica de ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 11xy + 11xz + 11yz = 0$$

que es una elipse con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $Q_c = (1 : 1 : 1) = G,$ ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 10 & 11 & 11 \\ 11 & 10 & 11 \\ 11 & 11 & 10 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$



y su discriminante es $\Delta = -\frac{3}{4} < 0$. Además:

☺ Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $C$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $x - y = 0$, en los puntos $U_c = (-1 : -1 : 3)$ y $V_c = (5 : 5 : -7)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $U_c$ el punto simétrico con respecto al punto $C$ del punto $C' = (1 : 1 : -1)$ simétrico del punto $C$ respecto del punto $N$.

😐 Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $B$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $x - z = 0$, en los puntos $W_c = (-1 : 3 - 1)$ y $X_c = (5 : -7 : 5)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $W_c$ el punto simétrico con respecto al punto $B$ del punto $B' = (1 : -1 : 1)$ simétrico del punto $B$ respecto del punto $M$.

☹ Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $A$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $y - z = 0$, en los puntos $Y_c = (3 : -1 : -1)$ y $Z_c = (-7 : 5 : 5)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $Y_c$ el punto simétrico con respecto al punto $A$ del punto $A' = (-1 : 1 : 1)$ simétrico del punto $A$ respecto del punto $L$.

⑧ Como la ecuación de la inelipse de Steiner del triángulo $ABC$ es:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

imponiendo que el punto $Q$ esté situado sobre ella, obtenemos que:

$$u^2 + v^2 + w^2 + 3uv + 3uw + 3vw = 0$$

lo cual significa que el punto $P$ ha de estar situado sobre la cónica de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 3yz = 0$$

que es una elipse con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $Q_i = (1 : 1 : 1) = G$, ya que es no degenerada, pues:

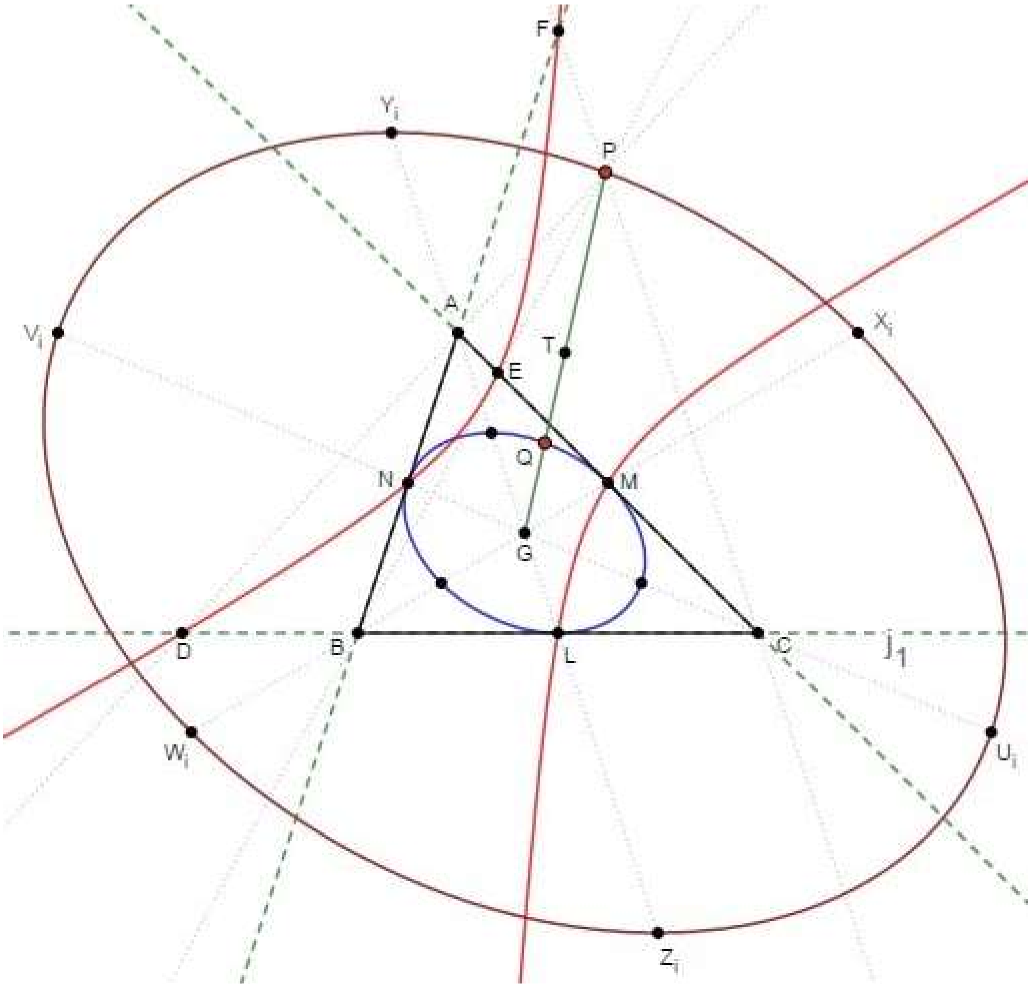
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta = -\frac{3}{4} < 0$. Además:

☺ Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $C$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $x - y = 0$, en los puntos $U_i = (-1 : -1 : 5)$ y $V_i = (1 : 1 : -1)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $V_i$ el punto simétrico del punto $C$ respecto del punto $N$.

😐 Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $B$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $x - z = 0$, en los puntos $W_i = (-1 : 5 - 1)$ y $X_i = (1 : -1 : 1)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $X_i$ el punto simétrico del punto $B$ respecto del punto $M$.

☹ Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $A$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $y - z = 0$, en los puntos $Y_i = (5 : -1 : -1)$ y $Z_i = (-1 : 1 : 1)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $Z_i$ el punto simétrico del punto $A$ respecto del punto $L$.




⑨ Como:

$$\begin{vmatrix} 2u+v+w & u+2v+w & u+v+2w \\ 0 & u & v \\ u & 0 & v \end{vmatrix} = -w^2 + uv - uw - vw$$

entonces, los puntos $Q$, $D$ y $E$ están alineados si y sólo si el punto $P$ está situado sobre la cónica de ecuación:

$$z^2 - xy + xz + yz = 0$$

que es una hipérbola con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $Q_{de} = (-1 : -1 : 3)$ (punto simétrico con respecto al punto $C$ del punto $C' = (1 : 1 : -1)$ simétrico del punto $C$ respecto del punto $N$) ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta = \dfrac{1}{4} > 0$. Además:

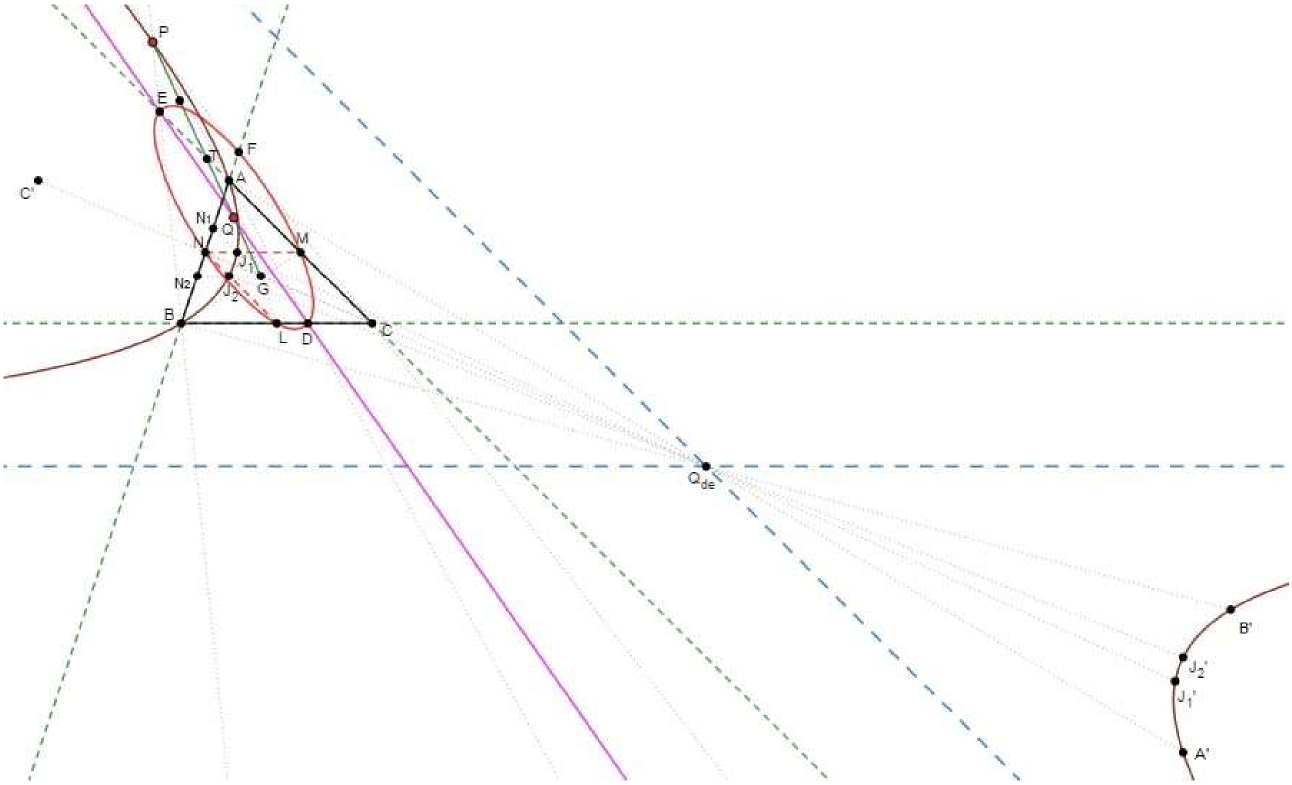
☺ Esta hipérbola pasa por los puntos $A$ y $B$, por lo que también pasa por sus respectivos puntos simétricos $A'$ y $B'$ respecto de su centro $Q_{de}$.

😐 Los puntos del infinito de esta hipérbola son:

$$\begin{cases} BC_\infty = (0:1:-1) \\ CA_\infty = (1:0:-1) \end{cases}$$

por lo que sus asíntotas son las rectas paralelas a $BC$ y $CA$ pasando por el punto $Q_{de}$.

☹ Esta hipérbola corta a la recta $MN$, cuya ecuación es $x - y - z = 0$, en el punto $J_1 = (3:2:1)$ y a la recta $LN$, cuya ecuación es $x - y + z = 0$, en el punto $J_2 = (2:3:1)$, siendo $J_1$ el punto medio del segmento $GN_1$ y $J_2$ el punto medio del segmento $GN_2$, donde $N_1 = (2:1:0)$ y $N_2 = (1:2:0)$ los puntos que dividen al segmento $AB$ en tres partes iguales. Por tanto, esta hipérbola también pasa por sus respectivos puntos simétricos $J_1'$ y $J_2'$ respecto de su centro $Q_{de}$.




⑩ Como el conjugado isotómico del punto $Q$ es:

$$Q^\bullet = ((u+2v+w)(u+v+2w) : (2u+v+w)(u+v+2w) : (2u+v+w)(u+2v+w))$$

y la ecuación la recta paralela a $BC$ pasando por los puntos medios de los segmentos $AB$ y $CA$ es:

$$MN \equiv x - y - z = 0$$

imponiendo que el punto $Q^{\bullet}$ está situado sobre dicha recta, obtenemos que:

$$3u^2 + v^2 + w^2 + 5uv + 5uw + vw = 0$$

lo cual significa que el punto $P$ ha de estar situado sobre la cónica de ecuación:

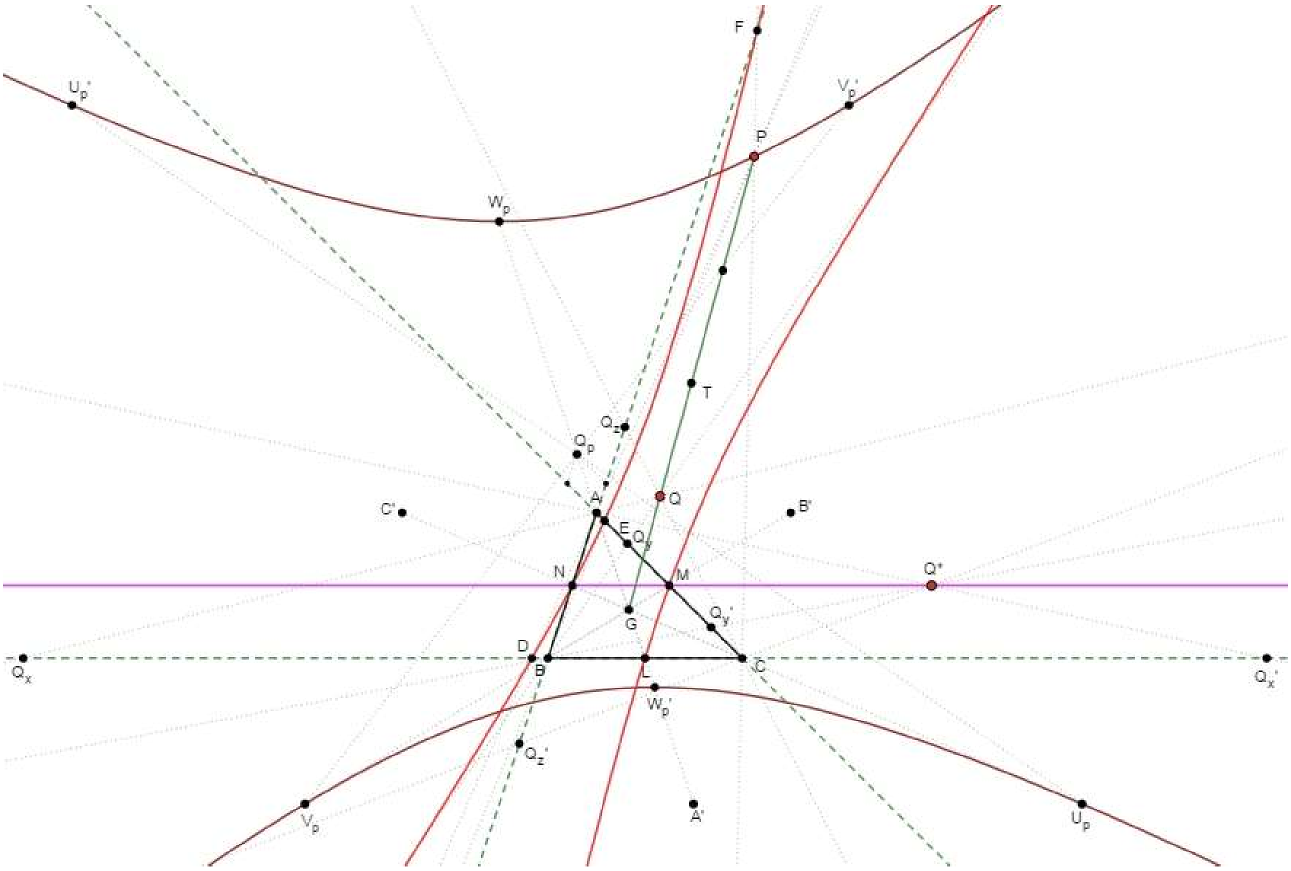
$$3x^2 + y^2 + z^2 + 5xy + 5xz + yz = 0$$

que es una hipérbola con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto:

$$Q_p = (7 : -1 : -1) = \left(\frac{7}{5} : -\frac{1}{5} : -\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AQ_p} = -\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$




y su discriminante es $\Delta = \dfrac{5}{4} > 0$. Además:

☺ Esta hipérbola corta a la mediana correspondiente al vértice $C$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $x - y = 0$, en el punto $U_p = (-1 : -1 : 3)$ simétrico respecto del punto $C$ del punto simétrico $C' = (1 : 1 : -1)$ del punto $C$ respecto del punto $N$. Por tanto, esta hipérbola también pasa por el punto $U_p'$ simétrico del punto $U_p$ respecto de su centro $Q_p$.

☹ Esta hipérbola corta a la mediana correspondiente al vértice $B$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $x-z=0$, en el punto $V_p=(-1:3:-1)$ simétrico respecto del punto $B$ del punto simétrico $B'=(1:-1:1)$ del punto $B$ respecto del punto $M$. Por tanto, esta hipérbola también pasa por el punto $V_p'$ simétrico del punto $V_p$ respecto de su centro $Q_p$.

☹ Esta hipérbola corta a la mediana correspondiente al vértice $A$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $y-z=0$, en los puntos $W_p=(3:-1:-1)$ y $W_p'=(-1:3:3)$, simétricos uno del otro respecto de su centro $Q_p$, siendo el punto $W_p$ el punto simétrico respecto del punto $A$ del punto simétrico $A'=(-1:1:1)$ del punto $A$ respecto del punto $L$.

❶ Como el conjugado isotómico del punto $Q$ es:

$$Q^{\bullet}=((u+2v+w)(u+v+2w):(2u+v+w)(u+v+2w):(2u+v+w)(u+2v+w))$$

entonces, la ecuación de la trilineal polar del punto $Q$ es:

$$(u+2v+w)(u+v+2w)x+(2u+v+w)(u+v+2w)y+(2u+v+w)(u+2v+w)z=0$$

por lo que, imponiendo que esta recta pase por el punto $G=(1:1:1)$, obtenemos que:

$$5u^2+5v^2+5w^2+11uv+11uw+11vw=0$$

lo cual significa que el punto $P$ ha de estar situado sobre la cónica de ecuación:

$$5x^2+5y^2+5z^2+11xy+11xz+11yz=0$$

que es una elipse con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $Q_t=(1:1:1)=G$, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 10 & 11 & 11 \\ 11 & 10 & 11 \\ 11 & 11 & 10 \end{vmatrix}=32\neq 0$$

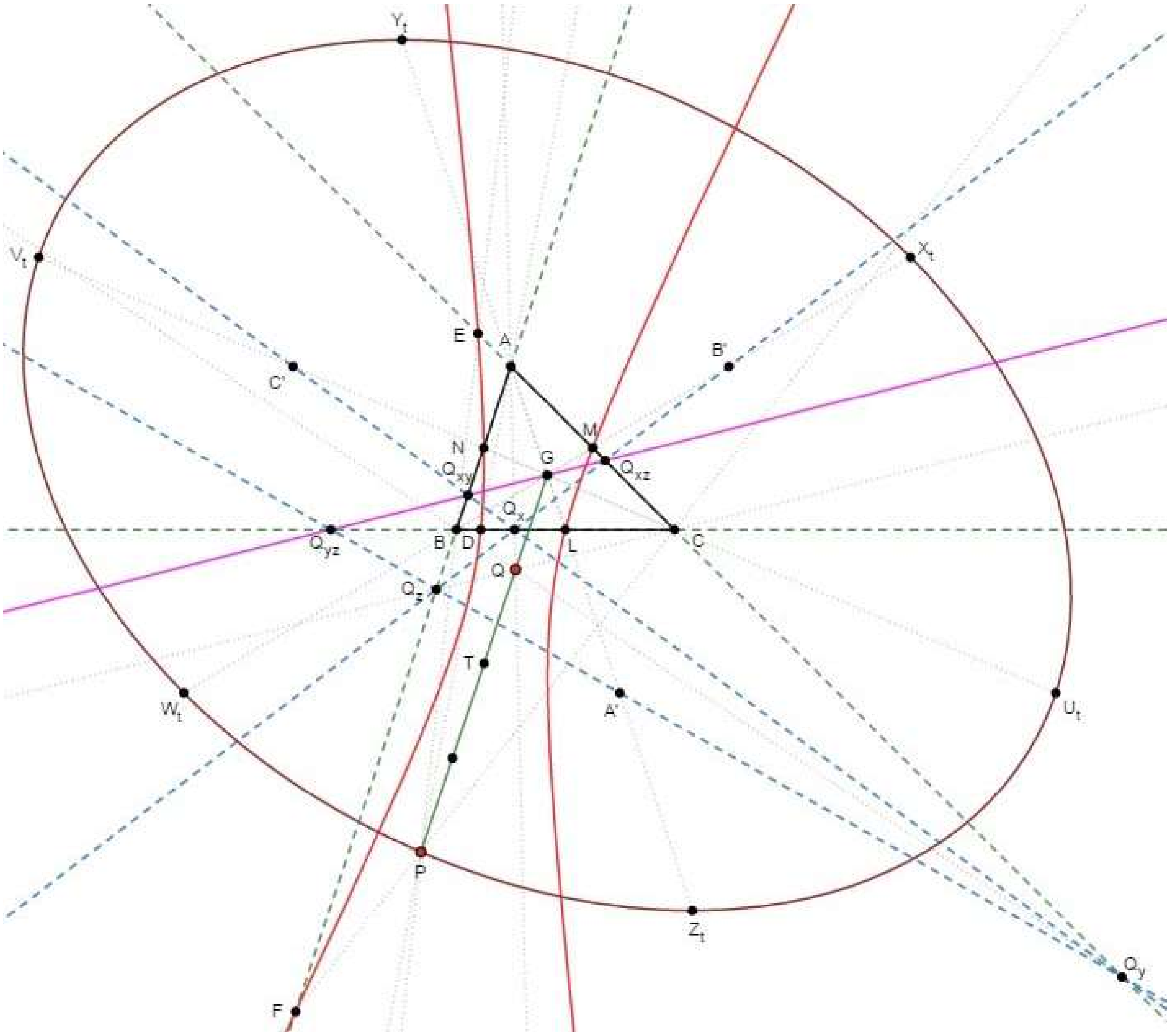
y su discriminante es $\Delta=-\dfrac{3}{4}<0$. Además:

☺ Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $C$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $x-y=0$, en los puntos $U_t=(-1:-1:3)$ y $V_t=(5:5:-7)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $U_t$ el punto simétrico con respecto al punto $C$ del punto $C'=(1:1:-1)$ simétrico del punto $C$ respecto del punto $N$.

☹ Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $B$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $x-z=0$, en los puntos $W_t=(-1:3-1)$ y $X_t=(5:-7:5)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $W_t$ el punto simétrico con respecto al punto $B$ del punto $B'=(1:-1:1)$ simétrico del punto $B$ respecto del punto $M$.

☹ Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice $A$ del triángulo $ABC$, cuya ecuación es $y-z=0$, en los puntos $Y_t=(3:-1:-1)$ y $Z_t=(-7:5:5)$, simétricos uno del otro respecto del centro $G$ de la elipse, siendo el punto $Y_c$ el punto simétrico con respecto al punto $A$ del punto $A'=(-1:1:1)$ simétrico del punto $A$ respecto del punto $L$.

# TRIÁNGULOS CABRI




**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**