Quincena del 1 de abril al 15 de Mayo de 2021.

Propuesto Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES “Bartolomé-José Gallardo” de Campanario (Badajoz).

***Problema* 988**.- *Dados un triángulo ABC con baricentro G y triángulo LMN ceviano de éste, se consideran un punto P y su triángulo ceviano DEF:*

1) *Probar que existe una cónica Ω que pasa por los puntos L, M, N, D, E y F.*

2) *Probar que el centro Q de la cónica Ω está alineado con los puntos P y G y que, además, se verifica que $PQ = 3QG$.*

3) *Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que la cónica Ω sea tangente a alguno de los lados del triángulo ABC. Probar que esta cónica no puede ser tangente exactamente a dos de los lados del triángulo ABC e identificar esta cónica en el caso en que sea tangente a los tres lados.*

4) *Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que la cónica Ω sea degenerada, identificando todos los pares de rectas resultantes.*

5) *Indicar en qué regiones del plano la cónica Ω es una elipse, una hipérbola o una parábola.*

6) *Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que la cónica Ω sea una hipérbola equilátera o un par de rectas perpendiculares.*

7 y 8) *Lugar de P para que el centro de la cónica Ω esté situado sobre la circunelipse (inelipse) de Steiner del triángulo ABC.*

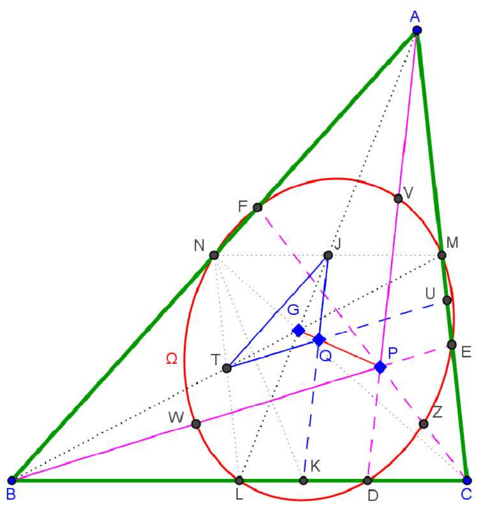
9) *Idem para que el centro Q la cónica Ω esté alineado con los puntos D y E.*

10) *Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que el $punto\ Q^*$conjugado isotómico del centro Q de la cónica Ω esté situado sobre la recta paralela a BC pasando por los puntos medios de los segmentos AB y CA.*

11) *Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que la trilineal polar del centro Q la cónica Ω pase por el baricentro G del triángulo ABC.*

M. A. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



1) Es la cónica de los nueve puntos y también pasa por los puntos medios de los segmentos AP, BP y CP.

2) Sean J el punto medio de AL (y de MN), K el de LD, T el de BM (y de LN) y U el punto medio de ME. De ello resulta que JK es paralelo a AD, TU es paralelo a BE y $Q = JK \cap TU$ es el centro de Ω. Tenemos por otro parte

$$JG + GL = JG + \frac{1}{3}AL = \frac{1}{2}\ AL,$$

por tanto $JG\ = \frac{1}{6}\ AL = \frac{1}{4}AG$.

Por un razonamiento similar llegamos a que $TG = \frac{1}{6}BM = \frac{1}{4}BG$ y de ello, el segmento TJ es paralelo a BA y su longitud es igual a un cuarto de la de BA.

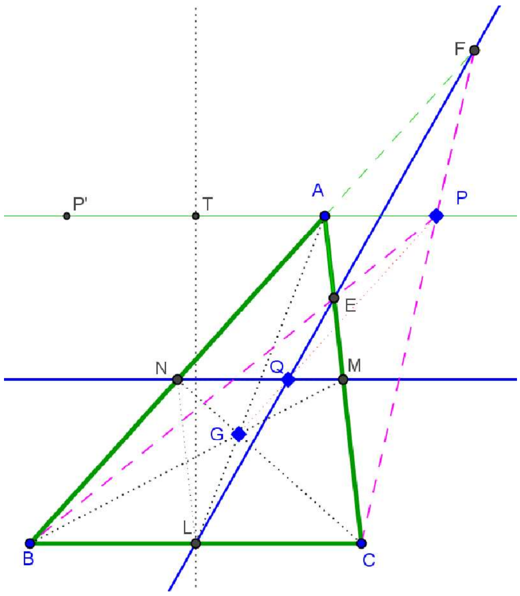
De ahí se deduce que los triángulos TJQ y BAP son semejantes y la razón de semejanza del primero al segundo es $\frac{1}{4}$ y (como también son homológicos), los vértices homólogos son concurrentes.

B y T concurren con A y J en el baricentro G. Por tanto P y Q han de concurrir en G. Una homotecia de centro G y razón 4, envía el triángulo TJQ al triángulo BAP. Por ello $PQ = 3QG$.

3) Para que Ω sea tangente al lado BC los puntos L y D se han de confundir en uno, por tanto el punto P ha de estar situado sobre la mediana de A. Para ser tangente a otro de los lados debe ocurrir también que P esté sobre la mediana correspondiente y en este caso, también estaría sobre la otra mediana, con lo que los puntos P y G coincidirían. La cónica resultante sería la elipse inscrita de Steiner del triángulo ABC.

4) La cónica será degenerada cuando tres de estos seis puntos que la definen estén alineados. Eso sucede por ejemplo, cuando P esté situado sobre uno de los lados. Sea éste BC. Las proyecciones de P sobre AB y AC son los propios puntos B y C, resultando que con el punto medio de BC tendremos tres puntos de la cónica sobre una recta. La otra recta que completa el par que define la cónica está formada por la paralela media correspondiente.

E igualmente si P está sobre cualquiera de los otros lados.



Hay otra posibilidad de alineamiento de tres puntos. Y es que P se encuentre sobre la paralela a uno de los lados, pasando por el vértice opuesto. Por ejemplo que P esté sobre la paralela a BC por A. El punto D de proyección por P del vértice A, se sitúa en el infinito. Como se observa **en la figura aparecen alineados los puntos E, F y L**. Pero esto hay que demostrarlo.

Para que los puntos E, F y L estén alineados, según el teorema de Menelao, tiene que verificarse

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$$

Como L es el punto medio de BC, eso se simplifica poniendo:

$$\frac{FA}{FB} = \frac{EA}{EC}.$$

Aplicando el mismo teorema al triángulo CAF con la transversal PB nos da

$$\frac{EA}{EC} \cdot \frac{PC}{PF} \cdot \frac{BF}{BA} = 1$$

Pero $\frac{PC}{PF} = \frac{AB}{AF}$ según el teorema de Thales en el triángulo BFC, por tanto

$$1 = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{PC}{PF} \cdot \frac{BF}{BA} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{AB}{AF} \cdot \frac{BF}{BA}, \Leftrightarrow 1 = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{BF}{FA} \Leftrightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{AF}{BF}$$

que es lo que pretendíamos conseguir.

La cónica degenera en el producto de las rectas LEF y DMN.

Si LT es la mediatriz de BC y el punto P se toma como el simétrico de A respecto de T (en la imagen P'), se obtienen dos rectas perpendiculares, o sea, una hipérbola equilátera degenerada.

Así obtendríamos otras tres cónicas degeneradas tomando rectas paralelas a los otros dos lados por el vértice opuesto.

Podríamos haber hecho esto utilizando las coordenadas baricéntricas, donde $P(u:v:w)$.

La ecuación del haz de cónicas que pasa por los puntos L, M, N y D, es $MN \cdot BC + \beta LN \cdot DM = 0$, donde MN es la recta $x = y + z$; LN es la recta $y = x + z$; y DM es la recta $vz = vx + wy$. Haciendo que pase por el punto $E(u:0:w)$ se obtiene finalmente la ecuación de la cónica de los nueve puntos

$$v(u + w)(y + z - x)x + u(x + z - y)(vx + wy - vz) = 0$$

o bien, $vwx^2 - w(u + v)xy - v(u + w)xz + uwy^2 - u(v + w)yz + uvz^2 = 0$ cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} -2vw & w(u+v) & v(u+w) \\ w(u+v) & -2uw & u(v+w) \\ v(u+w) & u(v+w) & -2uv \end{pmatrix}$$

o bien, dividiendo por uvw (siempre que sea no nulo) esta otra, mucho más sugerente (matriz de la cónica de los nueve puntos)

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{u} & \frac{u+v}{uv} & \frac{u+w}{uw} \\ \frac{u+v}{uv} & -\frac{2}{v} & \frac{v+w}{vw} \\ \frac{u+w}{uw} & \frac{v+w}{vw} & -\frac{2}{w} \end{pmatrix}$$

El determinante es (salvo factores numéricos) $uvw(u+v)(v+w)(w+u)$. Es cero si u, v o w lo son, lo que ocurre cuando P está sobre algún lado del triángulo y también cuando $u+v=0, v+w=0$ o $w+u=0$ que representan las rectas paralelas a cada lado por el vértice opuesto.

Es evidentemente mucho más sencillo llegar a este resultado por esta vía, pero la belleza de la geometría intrínseca se pierde sin remedio.

5) Aprovechando la expresión en coordenadas, podemos hallar la ecuación de los puntos del infinito de la cónica poniendo $z=-x-y$ en la ecuación, con ello, después de simplificar, llegamos a la expresión

$$v(u+w)x^2 + 2uvxy + u(v+w)y^2 = 0$$

El discriminante de la misma es

$$\Delta = (uv)^2 - uv(u+w)(v+w) = -uvw(u+v+w)$$

Voy a suponer que tenemos los parámetros normalizados, es decir que $u+v+w=1$. Entonces el discriminante es $\Delta = -uvw$. Con esto se excluye la posibilidad de que los tres parámetros sean negativos. También excluimos los casos de cónicas degeneradas (cuando alguno es nulo).

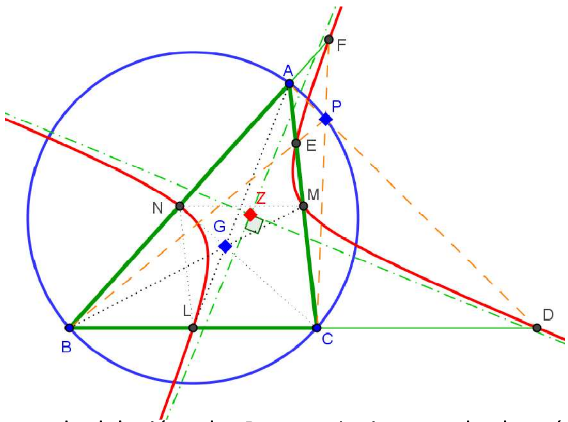
Si u, v y w son positivos, no hay soluciones: la cónica es una elipse. Si los tres son negativos es una hipérbola; si dos son positivos y uno negativo, también es una hipérbola; finalmente si dos son negativos y uno positivo es una elipse.

En resumen:

ES UNA ELIPSE si hay un número par de parámetros negativos (pudiendo ser cero).

ES UNA HIPÉRBOLA en el caso contrario: hay 1 negativo.

6) Cuando P esté en la paralela a BC por A y sea perpendicular a la recta MN se obtiene una hipérbola equilátera degenerada. Como la cónica que estamos tratando es la de los nueve puntos definida por el cuadrivértice $ABCP$, ha de pasar por el punto medio de AP, entonces para definir P bastará tomarlo en 4) como se describe al final de aquella parte.



Dejando aparte este caso, vamos a ver que **el lugar geométrico buscado es la circunferencia circunscrita al triángulo**; para ello nos vamos a apoyarnos en una sencilla propiedad: *Si un triángulo tiene sus vértices sobre una hipérbola equilátera, su ortocentro también está sobre ella.*

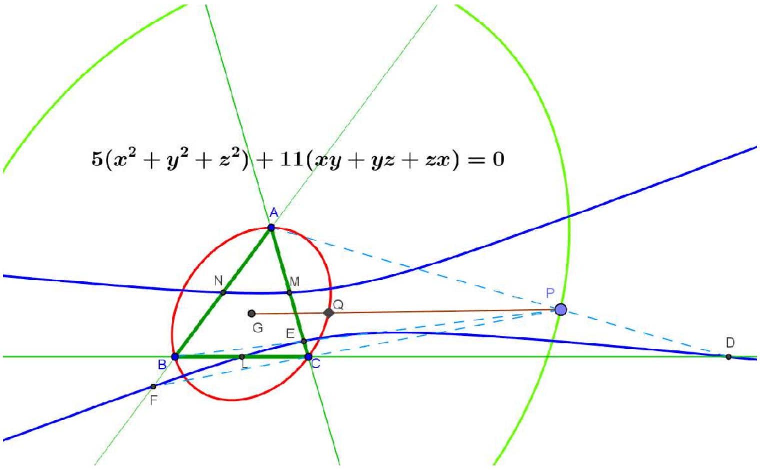
Es una propiedad muy sencilla pues si trazamos la altura desde un vértice, esta alcanza a la hipérbola en un punto. De las cónicas que pasan por el cuadrivértice que define ese punto junto con los del triángulo tenemos ya dos hipérbolas equiláteras, la inicial y la formada por la base y altura trazada del triángulo. Por consiguiente todas las cónicas son hipérbolas equiláteras y el punto en cuestión es el ortocentro. Si una hipérbola equilátera pasa por los puntos LMN (puntos medios de los lados de ABC), también pasa por su ortocentro, que no es otro que el circuncentro O de ABC. Es decir, O es el centro de una cónica que pasa por $ABCP$ (la cónica de los nueve puntos es el lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los puntos de un cuadrivértice), por consiguiente P ha de estar sobre **la circunferencia circunscrita de ABC.** Esta circunferencia **es el lugar geométrico de P.**

7 y **11)** A partir de la relación 2), $PQ = 3QG$, deducimos que una homotecia de centro G y razón 4 transforma el punto Q en el punto P y la elipse circunscrita de Steiner, en la que suponemos se encuentra Q, en la elipse que describe el lugar geométrico que buscamos.

Tomando coordenadas baricéntricas relativas a ABC obtenemos la ecuación de esa elipse:

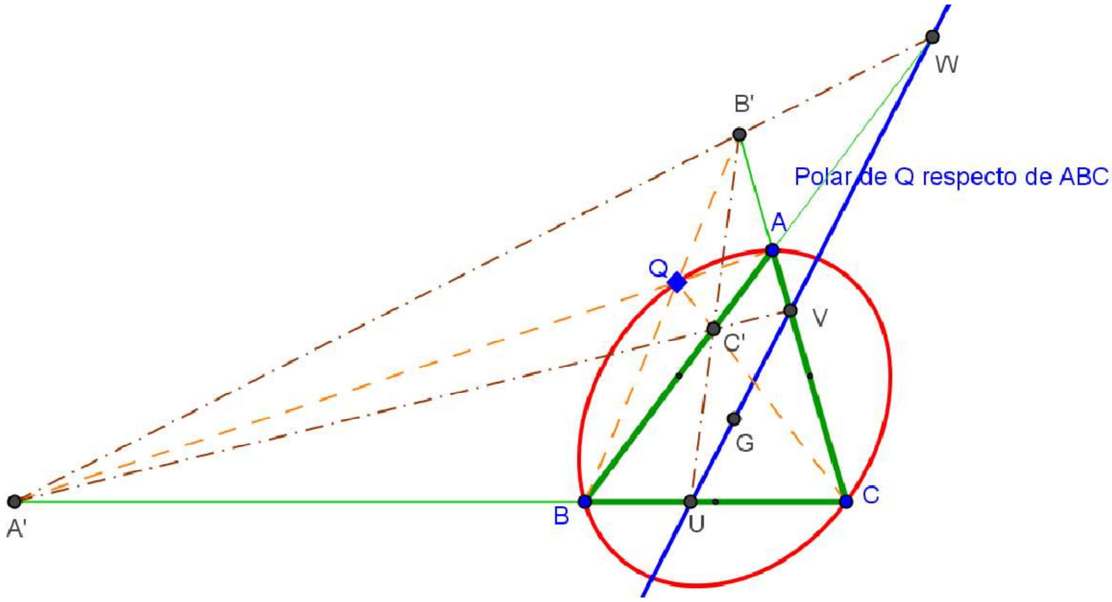
$$5(x^2 + y^2 + z^2) + 11(xy + yz + zx) = 0.$$

Cuando el punto P se toma sobre la elipse $5(x^2 + y^2 + z^2) + 11(xy + yz + zx) = 0$ (de color verde) la cónica que pasa por los pies de las cevianas de P y G (de color azul) tiene su centro Q sobre la elipse circunscrita de Steiner del triángulo ABC (de color rojo).



Para resolver **11)** observemos una propiedad que caracteriza a los puntos de la ex-elipse de Steiner.

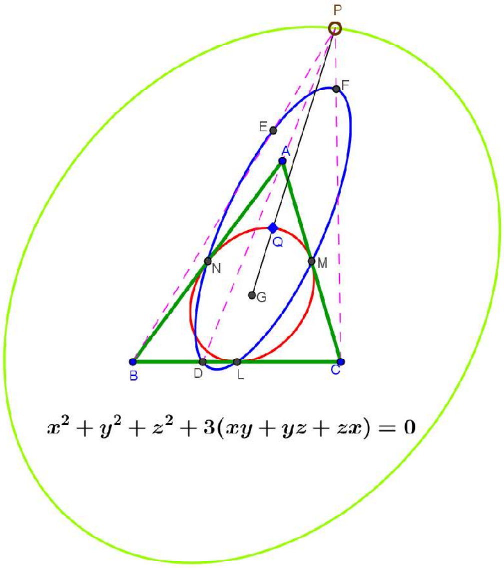
Si un punto está en la elipse circunscrita de Steiner, de ecuación $xy + yz + zx = 0$, **su polar respecto del triángulo ABC pasa por el baricentro**,



pues si $W(x_0: y_0: z_0)$ verifica $x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0 = 0$, dividiendo por $x_0y_0z_0 \neq 0$ se obtiene $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{z_0} = 0$ y esto es lo mismo que decir que la polar de W, la recta $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 0$ pasa por el baricentro. **Y recíprocamente.**

Por tanto cuando P está en la homotética de la circun-elipse de Steiner antes descrita, la polar del centro Q respecto del triángulo ABC pasa por el baricentro.

8) Una homotecia de centro G y razón 4 transforma el punto Q en el punto P y la elipse inscrita de Steiner de ecuación $(x+y-z)^2-4xy=0$ en la elipse que describe el lugar geométrico que buscamos.



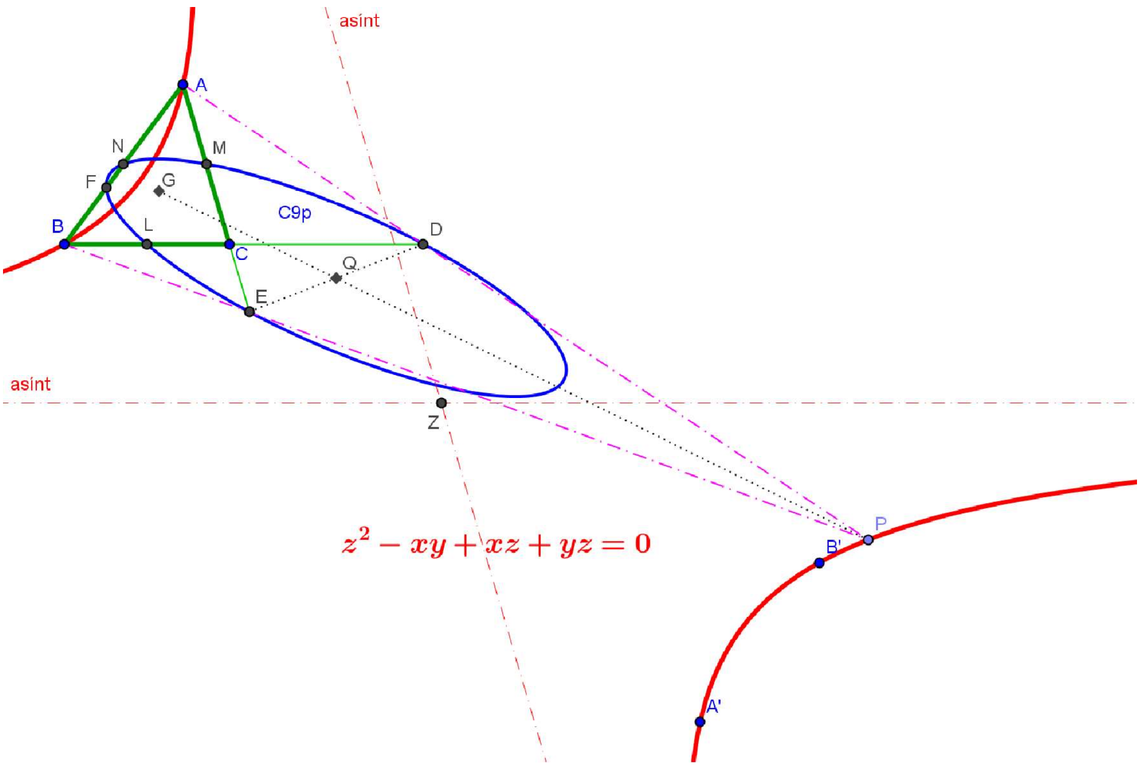
Cuando el punto P se toma sobre la elipse $x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)=0$ (la más exterior) la cónica que pasa por los pies de las cevianas de P y G (de color azul) tiene su centro Q sobre la elipse inscrita de Steiner del triángulo ABC (de color rojo).

9) Para que el centro de la cónica esté alineado con D y E, ponemos las coordenadas de estos puntos en coordenadas baricéntricas, así como también las del centro Q (obtenidas a partir de la relación 2)) y anulamos el determinante formado con ellas.

Se tienen $D(0:v:w)$; $E(u:0:w)$; $Q(2u+v+w:u+2v+w:u+v+2w)$ y

$$\begin{vmatrix} 2u+v+w & u+2v+w & u+v+2w \\ 0 & v & w \\ u & 0 & w \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando ese determinante se obtiene $(u+v)(u(w-v)+vw+w^2)=0$. El primer factor representa la recta paralela al lado AB que pasa por C.



El segundo factor, desarrollado y sustituyendo u, v, w por las variables x, y, z es la hipérbola $z^2+zy+zx-xy=0$ pues haciendo $z=-x-y$ la ecuación se reduce a $xy=0$, es decir hay dos puntos en el infinito, que son las direcciones de los lados AC y BC que definen las asíntotas. El centro es el punto $Z(1:1:-3)$ y pasa por $A(1:0:0)$; $B(0:1:0)$; $(0:1:-1)$ y por $(1:0:-1)$, elementos más que suficientes para poder representarla.

Es claro que para que D y E estén alineados con el centro Q, éste ha de ser su punto medio, como se ve en la figura correspondiente a esta situación.

10) El conjugado isotómico del punto $W(x_0: y_0: z_0)$ es el punto de coordenadas $W'\left(\frac{1}{x_0}: \frac{1}{y_0}: \frac{1}{z_0}\right)$. La recta que pasa por los puntos medios de AB y AC es la de ecuación $x = y + z$. El conjugado isotómico de Q es

$$Q^* = \left(\frac{1}{2u + v + w} : \frac{1}{u + 2v + w} : \frac{1}{u + v + 2w}\right)$$

y ha de verificar la ecuación

$$\frac{1}{2u + v + w} = \frac{1}{u + 2v + w} + \frac{1}{u + v + 2w}$$

o bien, quitando denominadores y simplificando $3u^2 + 5uv + 5uw + v^2 + vw + w^2 = 0$, que es otra cónica; poniendo $w = -u - v$ y simplificando resulta $u^2 - uv - v^2 = 0$ cuyas soluciones, dos puntos en el infinito, son $\left(1 \pm \sqrt{5}: 2: -3 \mp \sqrt{5}\right)$.

El lugar geométrico es una hipérbola cuya ecuación en coordenadas baricéntricas es

$$3x^2 + 5xy + 5xz + y^2 + yz + z^2 = 0.$$

Se puede calcular su centro fácilmente, es el punto $K(7 - 1: -1)$ y también un par de puntos $(-1: 3: 3)$ y $(-3: 1: 1)$, elementos suficientes para poder representarla gráficamente. ■