Propuesto por Antonio Casas Pérez, profesor jubilado del Departamento de Matemática Aplicada al Urbanismo, a la Edificación y al Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Madrid

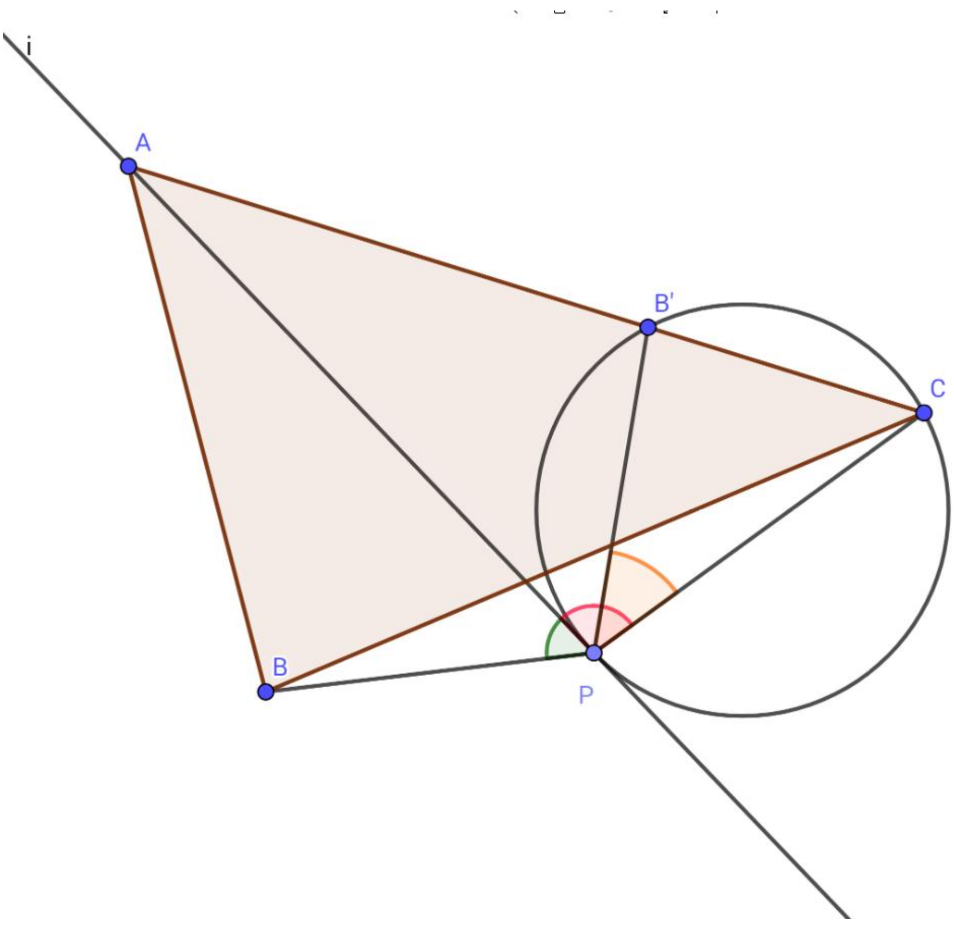
Problema 989

En la bisectriz de un ángulo A de un triángulo ABC de lados conocidos determinar un punto P tal que la diferencia de los ángulos APB y APC sea máxima.

Casas, A. (2021): Comunicación personal

Solución propuesta por Antonio Casas Pérez

Tomemos el simétrico de B respecto a la bisectriz, que será el punto B' sobre el lado AC. El ángulo diferencia será B'PC, cuyo vértice P está sobre la bisectriz y por lo tanto tendrá su valor máximo cuando el círculo determinado por los puntos B', P, C sea lo más pequeño posible, es decir, cuando este sea tangente en P a la bisectriz.



Notemos que el máximo del ángulo diferencia mide la "irregularidad" del triángulo ABC en el sentido de que si ABC fuese isósceles en A, la diferencia de ángulos PAB y PAC es siempre 0 y no existiría punto máximo y la construcción antes apuntada no sería posible.

Observemos que P debe ser el punto de tangencia del círculo tangente a la bisectriz en A y que pasa por B' y C, así P es el punto de tangencia del círculo cuyo centro está en la intersección de la recta mediatriz de B'C y la parábola de foco B' y directriz la bisectriz trazada antes.