TRIÁNGULOS CABRI

Problema 989. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Determinar un punto P sobre la bisectriz interior correspondiente al vértice A de un triángulo $ABC,$ tal que la diferencia entre los ángulos $\measuredangle APB$ y $\measuredangle APC$ sea máxima.

Solución:

Si fuese $b = AC = AB = c,$ entonces, para cualquier punto P situado sobre la bisectriz correspondiente al vértice A del triángulo $ABC,$ tendríamos que:

$$\measuredangle APB = \measuredangle APC$$

por lo que la diferencia entre los ángulos $\measuredangle APB$ y $\measuredangle APC$ sería constantemente nula y el problema no tendría sentido. Podemos, pues, suponer que $b > c$ (si fuese $b < c$ se razonaría de forma totalmente análoga), en cuyo caso, si D es el punto del segmento AC tal que $AB = AD,$ resulta que:

$$\measuredangle APB - \measuredangle APC = \measuredangle CPD$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo $ABC,$ como $D = (b-c:0:c)$ y la ecuación de la bisectriz interior correspondiente al vértice A es $cy - bz = 0,$ si $P = (t:b:c)\ (t \in \mathbb{R}),$ entonces:

$$\begin{cases} PC \equiv 0 = bx - ty \\ PD \equiv 0 = bcx + c(b-c-t)y + b(c-b)z \end{cases}$$

por lo que, si S es el doble del área del triángulo $ABC,$ se verifica que:

$$S\cot(\measuredangle CPD) = \frac{2bct^2 + (b+c)(a-b+c)(a+b-c)t + a^2(b^2+c^2) - (b^2-c^2)^2}{2(b-c)(b+c+t)}$$

y, por ser decreciente la función cotangente, la diferencia entre los ángulos $\measuredangle APB$ y $\measuredangle APC$ será máxima cuando alcance su valor mínimo la función:

$$f(t) = \frac{2bct^2 + (b+c)(a-b+c)(a+b-c)t + a^2(b^2+c^2) - (b^2-c^2)^2}{2(b-c)(b+c+t)}$$

que verifica que:

$$0 = f'(t) = \frac{bc[t^2 + 2(b+c)t + a^2]}{(b-c)(b+c+t)^2} \Leftrightarrow t = -(b+c) \pm \sqrt{(-a+b+c)(a+b+c)}$$

y, como:

$$f''(t) = \frac{2bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(b-c)(b+c+t)^3}$$

al ser:

$$\begin{cases} f''\left(-(b+c) + \sqrt{(-a+b+c)(a+b+c)}\right) = \dfrac{2bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(b-c)\sqrt{(-a+b+c)^3(a+b+c)^3}} > 0 \\ f''\left(-(b+c) - \sqrt{(-a+b+c)(a+b+c)}\right) = -\dfrac{2bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(b-c)\sqrt{(-a+b+c)^3(a+b+c)^3}} < 0 \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021

debemos tomar:

$$P = \left(-(b+c) + \sqrt{(-a+b+c)(a+b+c)}\ : b : c\right)$$

de forma que:

$$AP^2 = S_A\left[\frac{b+c}{\sqrt{(-a+b+c)(a+b+c)}}\right]^2 + S_B b^2 + S_C c^2 = bc = AB \cdot AC$$

es decir, el punto P es tal que AP es la media geométrica entre AB y AC, y como:

$$-(b+c) + \sqrt{(-a+b+c)(a+b+c)} = -(b+c) + \sqrt{(b+c)^2 - a^2} < 0$$

entonces, el punto P está situado en el semiplano definido por la recta BC que no contiene al punto A.