Pr. Cabri 990

Enunciado

a) Dados los puntos T (-1,-1), U (2,-3), V(3,2) y dada la circunferencia de centro O(0,0) y radio 5, comprobar que hay dos triángulos inscritos en la circunferencia, A1B1C1 y A2B2C2 tales que T es del lado B1C1, U es del lado A1C1 y V del lado A1B1, y que T es del lado B2C2, U es del lado A2C2, y V del lado A2B2

Siendo aproximadamente por Geogebra, A1 (4.35, -2.46) , A2 (4.78, 1.47)

b)Dados los puntos T (-1,-1), U (2,-3), V(3,2) y dada la circunferencia de centro O(0,0) y radio 6, comprobar que no hay ningún triángulo inscrito en la circunferencia, ABC tal que T es del lado BC, U es del lado AC y V del lado AB.

c) Estudiar el caso siguiente :

Dados los puntos T (-1,-1), U (2,-3), V(3,2) buscar la circunferencia de centro O(0,0) y radio r, tal que haya un único triángulo inscrito a la circunferencia, A B C, tal que T es del lado BC, U es del lado AC y V del lado AB.

Propuesto por R. Barroso (2021): A partir de J. Palencia, M. González (Tratado Geométrico, Dibujo Técnico I, (1992) pag.440).

Solución

de César Beade Franco

Para los apartados a y b es factible obtener una demostracción analítica exacta.

Sean P,Q R los vértices del triángulo buscado. Si P(p,$\pm\sqrt{5^2-p^2}$) es uno, Q será la intersección de circunferencia con la recta PT y R con la recta PV. Además U estará sobre la recta QR. Esta última condición, para un r dado, nos permite obtener una ecuación en p. Su solución nos proporciona el vértie p.

a) En este caso r=5 y P(p,$\sqrt{25^2-p^2}$) (1). Las rectas Pt y PR tienen ecuaciones respectivas

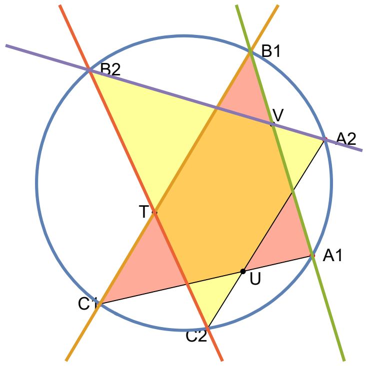
$p-\sqrt{25-p^2}-x-\sqrt{25-p^2}\,x+y+p\,y=0$ y

$-2\,p+3\,\sqrt{25-p^2}+2\,x-\sqrt{25-p^2}\,x-3\,y+p\,y=0$.

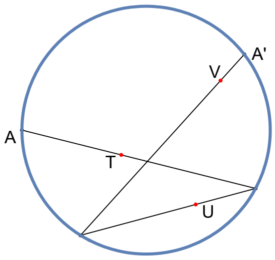
Tras el cálculo de Q y R (2) en función de p y tras imponerle a la recta PQ la condición de contener a U obtendríamos una ecuación cuyas soluciones reales son $p=\frac{5\left(-1235\pm 113\sqrt{3913}\right)}{12\,938}$ que corresponden a los triángulos de vértices

A1(4.35111,-2.4633), B1(2.25444,4.4629, y C1(-2.85119,-4.1074) uno y

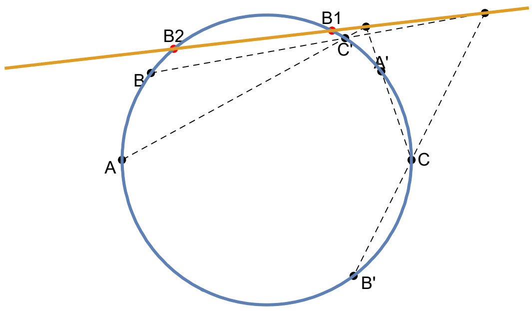
A2(4.77753,1.47485), B2(-3.209,3.83436) y C2(0.798428,-4.93584) el otro.



La forma “clásica” de resolver este problema es mediante un haz proyectivo (3).
Tomamos A sobre la cirunferencia sucesivamente des T, U y V, obteniendo un punto A’, tal como se ve en el siguiente dibujo.

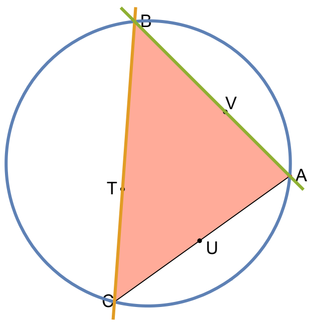


Repetimos el proceso con otros dos puntos B y C, obteniendo B’ y C’. Tenemos definida así una proyectividad de la circunferencia en si misma, cuyos puntos dobles calculamos. Estos resultan ser los puntos B1 y B2 calculados antes. Es claro ahora como obtener los triángulos.



b) En este caso r=6 y P(p,$\sqrt{36^2-p^2}$). Repitiendo el proceso anterior llegaríamos a una ecuación en p sin soluciones reales, lo que nos indica que tales triángulos no existen.
Si construyeramos una proyectividad como en a), veríamos que no tiene puntos dobles, de ahí la no existencia de soluciones.

c) Ahora la proyectividad tiene un único punto doble. Una construcción con un programa de Geometría Dinámica (Cabri) permite obtener 5.53034088.
Para obtener (de forma aproximada) un vértice, usamos el valor aproximado obtenido con Cabri y resolvemos una ecuación análoga a la de a). Obtenemos el punto B(p,$-\sqrt{25^2-p^2}$), con p=-0.528785 y r=5.53034088.



Notas

(1) Habría que considerar el caso $P(p, -\sqrt{25^2 - p^2})$, pero aquí no será necesario.

(2) El cálculo de Q y R nos daría $Q\left(\frac{-1250+46\sqrt{25-p^2}+p\left(-775-54p+46\sqrt{25-p^2}\right)}{629+4p(27+2p)}, \frac{-25\left(4+23\sqrt{25-p^2}\right)-2p\left(77+27p+23\sqrt{25-p^2}\right)}{629+4p(27+2p)}\right)$ y $R\left(\frac{3\left(375+12\sqrt{25-p^2}+p\left(-170+19p-4\sqrt{25-p^2}\right)\right)}{261+p(-114+13p)}, \frac{-90\left(-5+\sqrt{25-p^2}\right)+2p\left(-132+19p+9\sqrt{25-p^2}\right)}{261+p(-114+13p)}\right)$.

(3) Digamos la más rápida y elegante. Ver, por ejemplo, “Geometría métrica” de Puig Adam, T.2, pag. 157.