Pr. Cabri 991

Enunciado

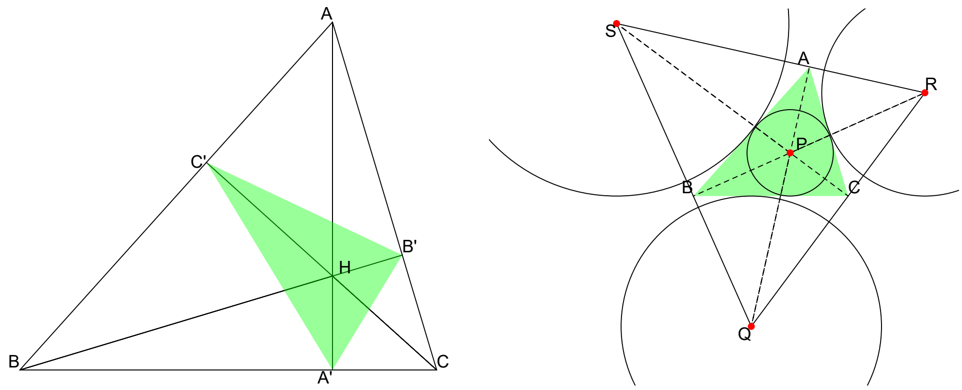
Los puntos P, Q, R y S constituyen un sistema ortocéntrico. Determinar un triángulo ABC tal que los 4 puntos P, Q, R, S
a) Sean los incentros de ABC.
b) Sean los puntos de Nagel de ABC.
c) Sean los puntos de Spieker de ABC.

Propuesto por César Beade.

Solución

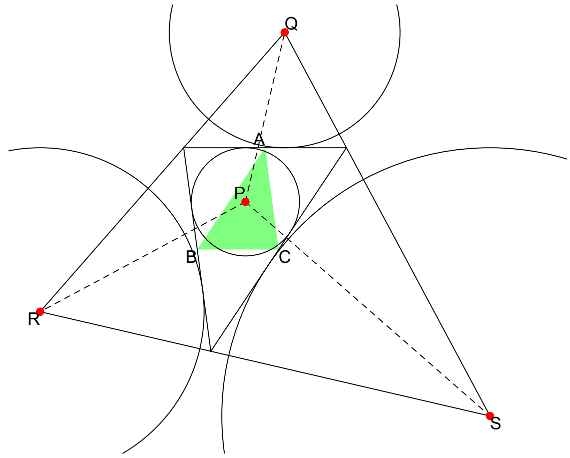
de César Beade Franco

Si 4 puntos P, Q, R, S constituyen un sistema ortocéntrico el ortocentro del triángulo formado por 3 de esos puntos es el otro punto. Es fácil deducir que los 4 triángulos que pueden formarse con esos 4 puntos tienen el mismo triángulo órtico.

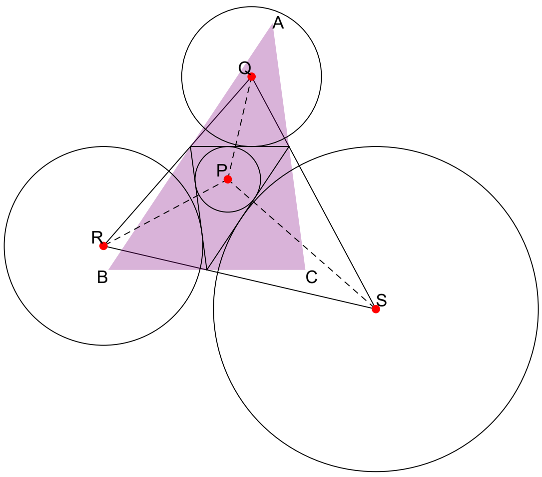


a) Es conocido que el triángulo órtico de los ex-incentros Q, R, S, de un triángulo cualquiera ABC es el propio triángulo. Y como las bisectrices interiores son perpendiculares a las exteriores, el incentro P de ABC es el ortocentro de QRS.
Si 4 puntos P, Q, R, S constituyen un sistema ortocéntrico su órtico los tendrá como incentros.

b) Los puntos de Nagel son los transformados isotómicos de los de Gergonne. También se pueden caracterizar como los incentros del triángulo antimedial (1). Como P, Q, R, S son los incentros de su órtico, el triángulo ABC no es otro que el medial de su órtico.



c) Los puntos de Spieker se pueden definir como los incentros del triángulo medial (2). Y sabemos también que P, Q, R, S son los incentros de su órtico. Así pues el triángulo ABC no es otro que el antimedial de su órtico.



Notas

(1) Omito la demostración que puede obtenerse por cálculo directo.
(2) Aparecen de forma un tanto sorprendente en el pr. 897, donde también se demuestra que son los centros de las
circunferencias de Monge de los incírculos tomados de 3 en 3.