Quincena del 1 de abril al 15 de Mayo de 2021.

Propuesto por Antonio Casas Pérez, profesor jubilado del Departamento de Matemática Aplicada al Urbanismo, a la Edificación y al Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Madrid

***Problema* 992**.- *Sea ABC un triángulo y D un punto interior a éste. Probar que el haz de cónicas que determinan los puntos A, B, C, D es un haz de hipérbolas.*

Elegimos h, una cualquiera de estas hipérbolas fijando un punto E de ella. Las puntos DA, DB, DC intersección con una asíntota de h y los puntos respectivos EA, EB, EC intersección con la misma asíntota definen un homografía emparejándolos en este orden. Probar que dicha homografía es una traslación.

Casas. A. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

La cuestión que se plantea en este problema es que la homografía definida proyectando los puntos de una hipérbola, desde dos puntos de la misma tomados como vértices sobre una de sus asíntotas, es una traslación.

La respuesta viene dada en la excelente obra, ya clásica, de D. Pedro Puig Adam, *Geometría Métrica vol.* II, donde en la LECCIÓN 17, § 9 pág 136, podemos leer:

"*Dos series proyectivas en las que son homólogos los puntos impropios LL', son semejantes.*

Pues formando cuaterna con estos puntos y otros tres homólogos, resulta $(AL_\infty\ BC) = (A'L'_\infty\ B'C')$ o sea $(ABC) = (A'B'C')$ es decir, $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ lo que prueba la proporcionalidad de los pares de segmentos homólogos $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ =razón de semejanza.

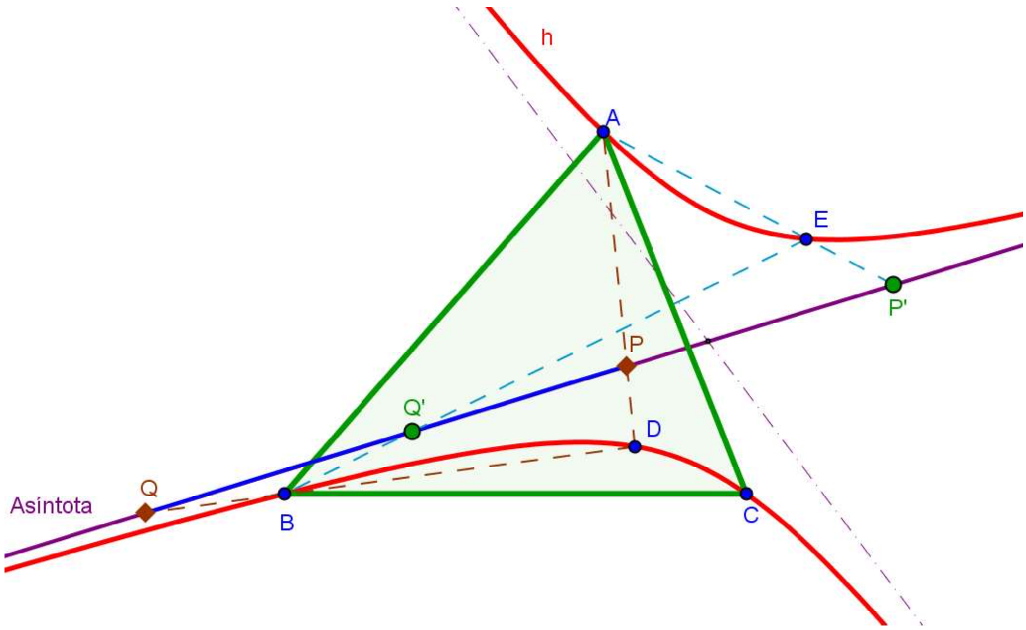
Si además de corresponderse los puntos impropios de dos series *proyectivas,* son iguales *dos segmentos homólogos $AB = A'B'$, las series* son *congruentes.*

Recíprocamente: *Toda* semejanza (y en particular *toda congruencia*) es *una proyectividad.* Por conservar las razones simples y, por tanto, las dobles.

Si las series están superpuestas, el punto del infinito es doble y puede ocurrir:

1 . *El otro punto doble M es propio.* Se habrá de verificar como antes $(MAB) = (MA'B')$ de donde $\frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}$ y resulta:

Toda proyectividad con *un punto doble impropio y otro propio M es una homotecia de centro M*.



2 . *No existe más punto doble* que *el impropio.* La proyectividad queda definida como veremos (lec. 18) dando este único punto doble impropio y dos puntos homólogos A y A', es decir, no hay más que una

proyectividad que cumple estas condiciones. Pero la traslación $\overrightarrow{AA}$ las cumple; luego *Toda prospectividad cuyo punto doble es impropio es una traslación."*

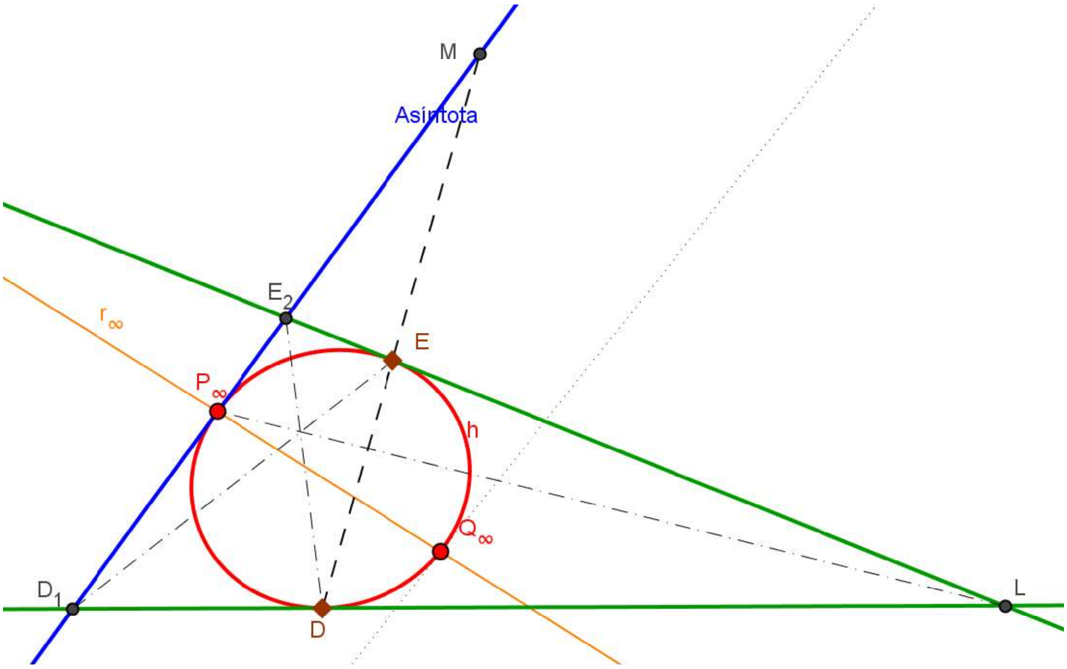
Es evidente que la proyectividad que definimos proyectando los puntos de la cónica sobre una recta no puede tener más puntos fijos que los puntos comunes entre ambas figuras. Por tanto, si se trata de una asíntota, el punto del infinito es doble. Concluiremos el problema demostrando que dos segmentos homólogos cualesquiera son iguales.

Proyectamos desde los puntos D y E los vértices A y B del triángulo.

Se tiene, según la figura π_D: $(A, B) \rightarrow (P, Q)$ y π_E: $(A, B) \rightarrow (P', Q')$.

Se ha de verificar que PQ y $P'Q'$ tienen igual longitud.

Bastará probar esa propiedad en un par cualquiera de puntos. Voy a tomar los propios D y E para ser proyectados desde ellos mismos sobre la asíntota. Necesitamos otra figura en el plano proyectivo donde veremos los puntos del infinito P_∞ y Q_∞ y la tangente en el primero de ellos.



La proyección de D desde E o la proyección de E desde D sobre la asíntota es el punto M de ésta.

La proyección de D desde D es la intersección de la tangente con la asíntota: punto D_1. Y la de E desde E es E_2.

Tenemos pues: π_D: $(D, E) \rightarrow (D_1, M)$ y π_E: $(D, E) \rightarrow (M, E_2)$.

Lo que queremos demostrar es que los segmentos D_1M y ME_2 son de la misma longitud, o de otra manera, que **M es el punto medio de D_1E_2**.

Para ello ha de ser armónica la cuaterna $(D_1E_2P_\infty M)$. Sea L la intersección de las tangentes en D y E.

Según el t. de Brianchon, las cevianas LP_∞, E_2D y D_1E son concurrentes y por ello la recta DE corta a la asíntota (recta D_1E_2) en el punto M que es el cuarto armónico de la terna D_1, E_2, P_∞. Y con esto hemos concluido. ■