TRIÁNGULOS CABRI

Problema 992. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Sean ABC un triángulo y D un punto interior a él. Probar que el haz de cónicas no degeneradas que determinan los puntos A, B, C y D es un haz de hipérbolas. Se elige una cualquiera de estas hipérbolas, $\hbar$, fijando un punto E de ella. Los puntos de intersección de las rectas DA, DB y DC con una de sus asíntotas y los puntos de intersección de las rectas EA, EB y EC con la misma asíntota definen una homografía, emparejándolos en este orden. Probar que dicha homografía es una traslación.

Solución:

① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como la ecuación de una circuncónica general no degenerada es:

$$xy + vxz + wyz = 0 \ (v \neq 0 \neq w)$$

imponiendo que pase por el punto $D = (1 : p : q) \ (p, q > 0)$ interior a dicho triángulo, obtenemos que:

$$v = -\frac{p(1+qw)}{q}$$

por lo que la ecuación de una cónica general no degenerada que pasa por los puntos A, B, C y D es:

$$qxy - p(1+qw)xz + wyz = 0 \left(0 \neq w \neq -\frac{1}{q}\right)$$

siendo su discriminante:

$$\Delta(w) = q^2(p+1)^2 w^2 + 2q(p^2 + pq + p - q)w + (p+q)^2 > 0$$

ya que $\Delta(0) = (p+q)^2 > 0$ y el discriminante de esta función cuadrática es $\Delta = -pq(p+q+1) < 0$. Por tanto, todas las cónicas de este haz son hipérbolas.

② El hecho que se pide probar es consecuencia de un problema mucho más general: “Dados una hipérbola H y dos puntos fijos y distintos D y E situados sobre ella, para cualquier punto P (distinto de D y E) situado sobre dicha hipérbola, la aplicación que transforma el punto D_P de intersección de la recta DP con una de las asíntotas de H en el punto E_P de intersección de la recta EP con la misma asíntota es una traslación”. Vamos a probar, pues, este resultado. Si llamamos O al centro de la hipérbola y V a uno de sus vértices, las proyecciones de V sobre las asíntotas de H (paralelamente a éstas) determinan dos puntos V_x y V_y, de forma que, respecto del sistema de referencia afín $\left\{O; u = \overrightarrow{OV_x}, v = \overrightarrow{OV_y}\right\}$, la ecuación de la hipérbola es $xy = 1$ y las ecuaciones de sus asíntotas son:

$$\begin{cases} OV_x \equiv y = 0 \\ OV_y \equiv x = 0 \end{cases}$$

por lo que:

$$\exists \ d, e \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ / \ d \neq e : \begin{cases} D = \left(d, \frac{1}{d}\right) \\ E = \left(e, \frac{1}{e}\right) \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y, si $P=\left(p,\frac{1}{p}\right)\left(d\neq \underset{\substack{\nparallel\\ 0}}{p}\neq e\right)$, resulta que:

$$\begin{cases} DP \equiv x+dpy-d-p=0 \\ EP \equiv x+epy-e-p=0 \end{cases}$$

siendo los puntos de intersección de estas dos rectas con la asíntota OV_x :

$$\begin{cases} D_p=(d+p,0) \\ E_p=(e+p,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OD_p}=(d+p)u \\ \overrightarrow{OE_p}=(e+p)u \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{D_PE_P}=\overrightarrow{OE_p}-\overrightarrow{OD_p}=(e-d)u \Rightarrow E_P=(e-d)u+D_P$$

y, por tanto, la aplicación que transforma el punto D_P en el punto E_P es una traslación de vector $(e-d)u$.