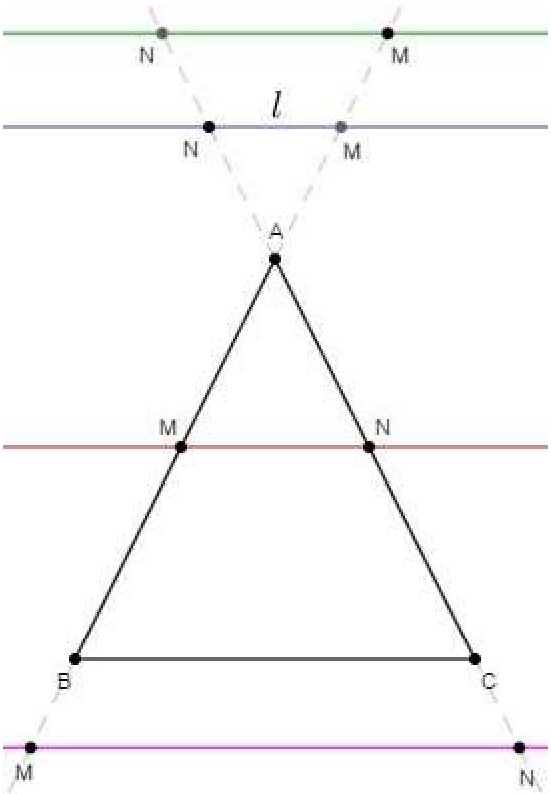
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 993. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados un triángulo ABC y una recta l, trazar una recta paralela a l que corte a la recta AB en un punto M y a la recta AC en un punto N de forma que $BM = CN$, analizando todos los casos posibles e indicando el número de soluciones que hay en cada caso.

Solución:

Vamos a distinguir tres casos:

① Si los puntos M y N están situados en el mismo semiplano respecto de la recta BC y $b = c$, el problema admite solución únicamente cuando la recta l es paralela a la recta BC (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior correspondiente al vértice A del triángulo ABC), en cuyo caso, existen infinitas soluciones, siendo una de ellas la propia recta l.



② Si los puntos M y N están situados en el mismo semiplano respecto de la recta BC y $b \neq c$, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si una recta cualquiera corta a la recta AB en un punto M y a la recta AC en un punto N de forma que $BM = CN$, entonces:

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \begin{cases} M = (m : c - m : 0) \\ N = (m : 0 : b - m) \end{cases}$$

por lo que:

$$MN \equiv (b-m)(c-m)x - m(b-m)y - m(c-m)z = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro m del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a m:

$$\begin{cases} 0 = (b-m)(c-m)x - m(b-m)y - m(c-m)z \\ 0 = -(b+c-2m)x + (2m-b)y + (2m-c)z \end{cases}$$

por lo que, despejando m en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$(b-c)^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2b(b-c)xy - 2c(b-c)xz + 2bcyz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} (b-c)^2 & b(b-c) & -c(b-c) \\ b(b-c) & b^2 & bc \\ -c(b-c) & bc & c^2 \end{vmatrix} = -4b^2c^2(b-c)^2 \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta = 0$, por lo que su único punto en la recta del infinito es su centro (conjugado de la recta del infinito) $Z = (c-b : b : -c)$, que coincide con el punto del infinito de la bisectriz exterior correspondiente al vértice A del triángulo ABC, cuya ecuación es:

$$cy + bz = 0$$

Además, como esta bisectriz corta a la parábola en el punto:

$$V = (b(b+c)^2 : -b^2(b-c) : bc(b-c))$$

de forma que la recta tangente a la parábola en este punto:

$$t_V \equiv (b-c)x + (b+c)y - (b+c)z = 0$$

tiene el mismo punto del infinito $t_V^\infty = (b+c : -b : -c)$ que la bisectriz interior correspondiente al vértice A del triángulo ABC, cuya ecuación es:

$$cy - bz = 0$$

lo cual significa que la recta t_V es perpendicular al eje de la parábola y, por tanto, el punto V es el vértice de ésta y la bisectriz exterior correspondiente al vértice A es su eje, siendo, además:

$$P = t_V \cap BC = (0 : 1 : 1)$$

A continuación, como las rectas AB, BC y CA cortan a la parábola en único punto:

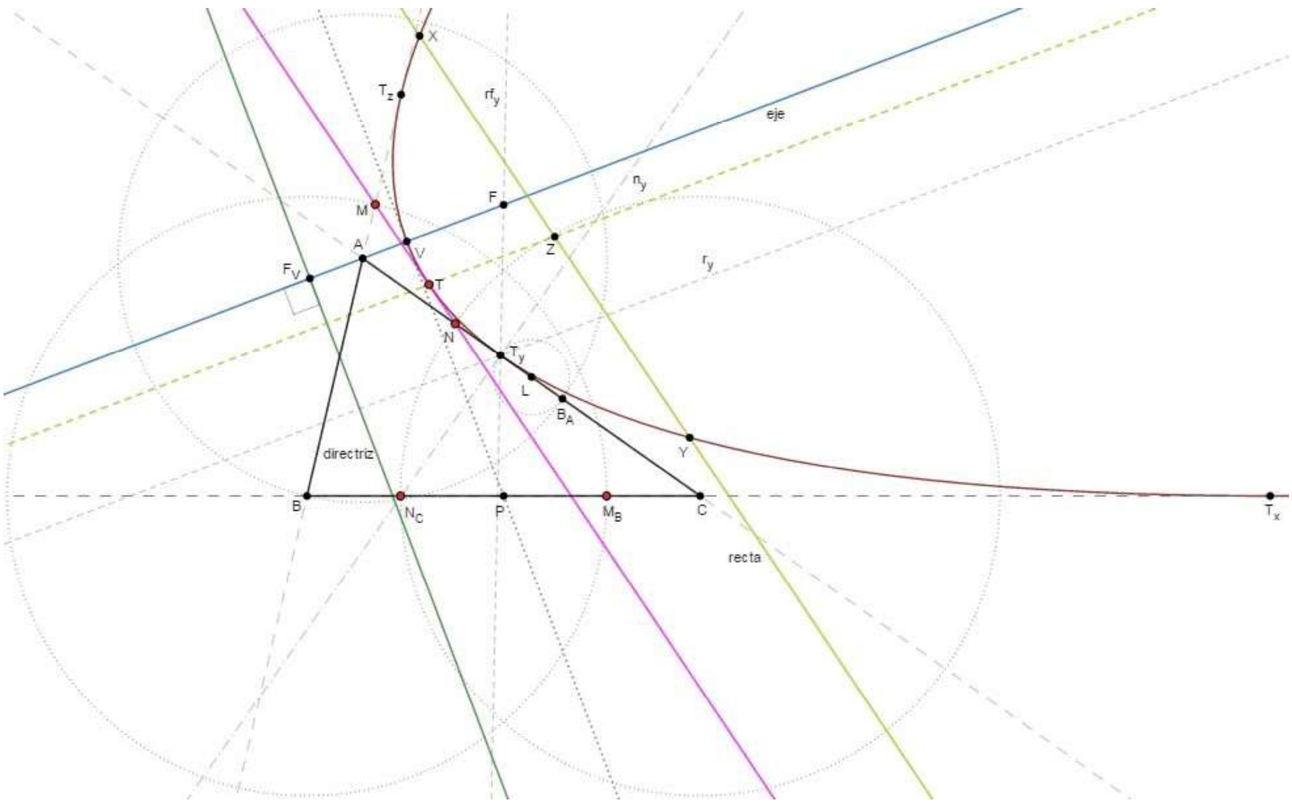
$$\begin{cases} T_z = AB \cap \text{ parábola} = (b : c-b : 0) \\ T_y = CA \cap \text{ parábola} = (c : 0 : b-c) \\ T_x = BC \cap \text{ parábola} = (0 : -c : b) \end{cases}$$

entonces, estas tres rectas son tangentes a la parábola en dichos puntos y, si r_y el rayo paralelo al eje de la parábola que incide en ella en el punto T_y, la reflexión rf_y de r_y sobre la recta n_y normal a la parábola (perpendicular al lado CA) en el punto T_y corta al eje de la parábola en el foco de ésta, siendo el punto F_V el punto simétrico del punto F respecto del punto V y la directriz de la parábola la recta perpendicular a su eje pasando por el punto F_V. Por tanto, para construir esta parábola, haremos lo siguiente, suponiendo que $b > c$ (en caso contrario, se razonaría de forma totalmente análoga):

☺ Como $T_y = \left(\frac{c}{b} : 0 : \frac{b-c}{b}\right)$ es el punto situado el segmento CA a una distancia $\left(\frac{c}{b}\right)b = c$ del punto C, para construirlo, con centro en el punto A, giramos el punto B hasta el punto B_A, situado sobre el segmento AC a una distancia c del punto A, y, después, hallamos el punto simétrico T_y del punto B_A con respecto al punto medio L de dicho segmento.

😐 Podemos construir el vértice V de la parábola intersecando la recta PV (que pasa por el punto medio del segmento BC y es paralela a bisectriz interior correspondiente al vértice A del triángulo ABC) con la bisectriz exterior correspondiente al vértice A del triángulo ABC.

☹ Podemos construir el foco F y la directriz de la parábola según se ha descrito anteriormente. Por tanto, ya podemos construir la parábola.



Una vez construída la parábola, vamos a distinguir otros cuatro casos:

❶ Si la recta l es paralela a la bisectriz exterior correspondiente al vértice A del triángulo ABC (eje de la parábola), entonces, no existe ninguna recta paralela a ella que sea tangente a la parábola, por lo que el problema no tiene ninguna solución.

❷ Si la recta l es paralela a la recta AB, entonces, la recta tangente a la parábola paralela a ella es la recta AB, por lo que el problema no tendría sentido, ya que no se podría determinar el punto M.

❸ Si la recta l es paralela a la recta AC, entonces, la recta tangente a la parábola paralela a ella es la recta AC, por lo que el problema no tendría sentido, ya que no se podría determinar el punto N.

❹ En cualquier otro caso, si la recta l la corta en los puntos X e Y (si la recta l no cortase a la parábola, razonaríamos de forma totalmente análoga con cualquier recta paralela a ella que corte a la parábola en dos puntos) y llamamos Z al punto medio del segmento XY, según su prueba en el Ejercicio 3429, la recta paralela a la bisectriz exterior correspondiente al vértice A del triángulo ABC (eje de la parábola) corta a la parábola en el punto T de tangencia de la recta buscada, es decir, la única solución del problema es la recta tangente a la parábola en el punto T.

③ Si los puntos M y N están situados en distintos semiplanos respecto de la recta BC, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si una recta cualquiera corta a la recta AB en un punto M y a la recta AC en un punto N de forma que $BM = CN$, entonces:

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \begin{cases} M = (m : c-m : 0) \\ N = (-m : 0 : b+m) \end{cases}$$

por lo que:

$$MN \equiv (b+m)(c-m)x - m(b+m)y + m(c-m)z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro m del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a m:

$$\begin{cases} 0 = (b+m)(c-m)x - m(b+m)y + m(c-m)z \\ 0 = -(b-c+2m)x - (b+2m)y + (c-2m)z \end{cases}$$

por lo que, despejando m en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$(b+c)^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2b(b+c)xy + 2c(b+c)xz - 2bcyz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b(b+c) & c(b+c) \\ b(b+c) & b^2 & -bc \\ c(b+c) & -bc & c^2 \end{vmatrix} = -4b^2c^2(b+c)^2 \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta = 0$, por lo que su único punto en la recta del infinito es su centro (conjugado de la recta del infinito) $Z = (b+c : -b : -c)$, que coincide con el punto del infinito de la bisectriz interior correspondiente al vértice A del triángulo ABC, cuya ecuación es:

$$cy - bz = 0$$

Además, como esta bisectriz corta a la parábola en el punto:

$$V = (-b(b-c)^2 : b^2(b+c) : bc(b+c))$$

de forma que la recta tangente a la parábola en este punto:

$$t_V \equiv (b+c)x + (b-c)y - (b-c)z = 0$$

tiene el mismo punto del infinito $t_V^\infty = (c-b : b : -c)$ que la bisectriz exterior correspondiente al vértice A del triángulo ABC, cuya ecuación es:

$$cy + bz = 0$$

lo cual significa que la recta t_V es perpendicular al eje de la parábola y, por tanto, el punto V es el vértice de ésta y la bisectriz interior correspondiente al vértice A es su eje, siendo, además:

$$L = t_V \cap BC = (0 : 1 : 1)$$

A continuación, como las rectas AB, BC y CA cortan a la parábola en único punto:

$$\begin{cases} T_z = AB \cap \text{ parábola} = (-b : b+c : 0) \\ T_y = CA \cap \text{ parábola} = (-c : 0 : b+c) \\ T_x = BC \cap \text{ parábola} = (0 : c : b) \end{cases}$$

entonces, estas tres rectas son tangentes a la parábola en dichos puntos y, si r_y el rayo paralelo al eje de la parábola que incide en ella en el punto T_y, la reflexión rf_y de r_y sobre la recta n_y normal a la parábola (perpendicular al lado CA) en el punto T_y corta al eje de la parábola en el foco de ésta, siendo el punto F_V el punto simétrico del punto F respecto del punto V y la directriz de la parábola la recta perpendicular a su eje pasando por el punto F_V. Por tanto, para construir esta parábola, haremos lo siguiente:

☺ Como $T_y = \left(-\frac{c}{b} : 0 : \frac{b+c}{b}\right)$ es el punto situado el la prolongación del segmento AC a una distancia $\left(\frac{c}{b}\right)b = c$ del punto C, para construirlo, con centro en el punto B, giramos el punto A hasta el punto A_B, a continuación, hallamos el punto simétrico A_{BL} del punto A_B con respecto al punto medio L deL segmento BC y, para terminar, con centro en el punto C, giramos el punto A_{BL} hasta el punto T_y.

😐 Podemos construir el vértice V de la parábola intersecando la recta LV (que pasa por el punto medio del segmento BC y es paralela a bisectriz exterior correspondiente al vértice A del triángulo ABC) con la bisectriz interior correspondiente al vértice A del triángulo ABC.

☹ Podemos construir el foco F y la directriz de la parábola según se ha descrito anteriormente. Por tanto, ya podemos construir la parábola.

Una vez construída la parábola, vamos a distinguir otros cuatro casos:

❶ Si la recta l es paralela a la bisectriz interior correspondiente al vértice A del triángulo ABC (eje de la parábola), entonces, no existe ninguna recta paralela a ella que sea tangente a la parábola, por lo que el problema no tiene ninguna solución.

❷ Si la recta l es paralela a la recta AB, entonces, la recta tangente a la parábola paralela a ella es la recta AB, por lo que el problema no tendría sentido, ya que no se podría determinar el punto M.

❸ Si la recta l es paralela a la recta AC, entonces, la recta tangente a la parábola paralela a ella es la recta AC, por lo que el problema no tendría sentido, ya que no se podría determinar el punto N.

❹ En cualquier otro caso, si la recta l la corta en los puntos X e Y (si la recta l no cortase a la parábola, razonaríamos de forma totalmente análoga con cualquier recta paralela a ella que corte a la parábola en dos puntos) y llamamos Z al punto medio del segmento XY, según su prueba en el Ejercicio 3429, la recta paralela a la bisectriz interior correspondiente al vértice A del triángulo ABC (eje de la parábola) corta a la parábola en el punto T de tangencia de la recta buscada, es decir, la única solución del problema es la recta tangente a la parábola en el punto T.