

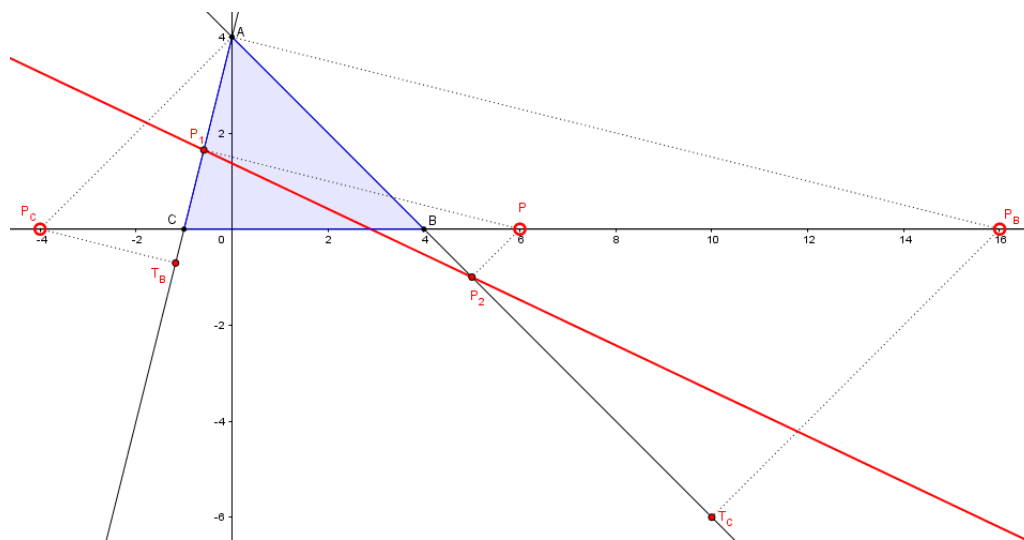
"Problema 994.-

Sea ABC un triángulo. Elegido un punto P de la recta BC, se construye la recta r que pasa por los puntos proyección ortogonal de P sobre las rectas AB y AC. Probar que dichas rectas envuelven una cónica. ¿Qué tipo de cónica es la curva envuelta? Hallarla.

Casas, A. (2021) : Comunicación personal."

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros. Córdoba.

- La envolvente de esas rectas es una PARÁBOLA perteneciente al Haz de cónicas determinado por los puntos de tangencia T_B sobre el lado AC y T_C sobre el lado AB del triángulo dado como ahora probaremos.



$$P = \{t, \theta\}$$

$$\text{Recta AB : } bx + (1 - a)y = b \rightarrow$$

$$\text{Recta perpendicular a la recta AB por el punto P : } (a - 1)x + by = (a - 1)t$$

$$\text{Recta AC : } bx - ay = \theta \rightarrow \text{Recta perpendicular a la recta AC por el punto P : } ax + by = at$$

$$\text{Punto } P_B : \{bx - ay = \theta, ax + by = at\}; P_B = \left\{ \frac{a^2 t}{a^2 + b^2}, \frac{ab t}{a^2 + b^2} \right\}$$

$$\text{Punto } P_C : \{bx + (1 - a)y = b, (a - 1)x + by = (a - 1)t\};$$

$$P_C = \left\{ \frac{b^2 + t - 2at + a^2 t}{1 - 2a + a^2 + b^2}, \frac{b - ab - bt + abt}{1 - 2a + a^2 + b^2} \right\}$$

$$\text{Recta } P_B P_C : P_B = \left\{ \frac{a^2 t}{a^2 + b^2}, \frac{ab t}{a^2 + b^2} \right\}; P_C = \left\{ \frac{b^2 + t - 2at + a^2 t}{1 - 2a + a^2 + b^2}, \frac{b - ab - bt + abt}{1 - 2a + a^2 + b^2} \right\}$$

$$\text{Recta } P_B$$

$$P_C : (-a^2 + a^3 - b^2 + ab^2 + at - a^2 t + b^2 t)x + b(a^2 + b^2 + t - 2at)y = at(a^2 + b^2 + t - a(1 + t))$$

$$\text{Envolvente de las rectas } P_B P_C :$$

$$\left\{ \begin{aligned} &(-a^2 + a^3 - b^2 + ab^2 + at - a^2 t + b^2 t)x + b(a^2 + b^2 + t - 2at)y - at(a^2 + b^2 + t - a(1 + t)) = 0, \\ &\partial_t ((-a^2 + a^3 - b^2 + ab^2 + at - a^2 t + b^2 t)x + b(a^2 + b^2 + t - 2at)y - at(a^2 + b^2 + t - a(1 + t))) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\partial_t ((-a^2 + a^3 - b^2 + ab^2 + at - a^2 t + b^2 t)x + b(a^2 + b^2 + t - 2at)y - at(a^2 + b^2 + t - a(1 + t))) = 0$$

$$\text{Solve}[-(1-a)at - a(a^2 + b^2 + t - a(1+t)) + (a - a^2 + b^2)x + (1-2a)by = 0, t] \rightarrow$$

$$t == \frac{-a^2 + a^3 + ab^2 - ax + a^2x - b^2x - by + 2aby}{2(-1+a)a}$$

$$(-a^2 + a^3 - b^2 + ab^2 + at - a^2t + b^2t)x + b(a^2 + b^2 + t - 2at)y - at(a^2 + b^2 + t - a(1+t)) = 0 / .$$

$$t \rightarrow \frac{-a^2 + a^3 + ab^2 - ax + a^2x - b^2x - by + 2aby}{2(-1+a)a}$$

$$a^6 - 2a^5(1+x) + a^4(1+2b^2+4x+x^2) + b^2(bx+y)^2 - 2a^3(b^2+x+2b^2x+x^2+by-2bxy) - 2ab(b^3x-xy+b^2(-1+2x)y+b(2x-x^2+2y^2)) + a^2(b^4+x^2+b(2-6x)y+b^2(8x-2x^2+4y^2)) = 0$$

$$a^4 - 2a^5 + a^6 - 2a^3b^2 + 2a^4b^2 + a^2b^4 - 2a^3x + 4a^4x - 2a^5x - 4ab^2x + 8a^2b^2x - 4a^3b^2x - 2ab^4x + a^2x^2 - 2a^3x^2 + a^4x^2 + 2ab^2x^2 - 2a^2b^2x^2 + b^4x^2 + 2a^2by - 2a^3by + 2ab^3y + 2abxy - 6a^2bxy + 4a^3bxy + 2b^3xy - 4ab^3xy + b^2y^2 - 4ab^2y^2 + 4a^2b^2y^2 = 0$$

$$\text{Términos independientes : } a^4 - 2a^5 + a^6 - 2a^3b^2 + 2a^4b^2 + a^2b^4$$

$$\text{Términos en } x : -2a^3x + 4a^4x - 2a^5x - 4ab^2x + 8a^2b^2x - 4a^3b^2x - 2ab^4x$$

$$\text{Términos en } x^2 : a^2x^2 - 2a^3x^2 + a^4x^2 + 2ab^2x^2 - 2a^2b^2x^2 + b^4x^2$$

$$\text{Términos en } y : 2a^2by - 2a^3by + 2ab^3y$$

$$\text{Términos en } xy : 2abxy - 6a^2bxy + 4a^3bxy + 2b^3xy - 4ab^3xy$$

$$\text{Términos en } y^2 : b^2y^2 - 4ab^2y^2 + 4a^2b^2y^2$$

LA MATRIZ C DE LA EXPRESIÓN MATRICIAL DE LA CURVA ENVOLVENTE SERÁ :

C ==

$$\begin{pmatrix} (-a+a^2-b^2)^2 & (-1+2a)b(-a+a^2-b^2) & -a(a^2-2a^3+a^4+2b^2-4ab^2+2a^2b^2+b^4) \\ (-1+2a)b(-a+a^2-b^2) & (-1+2a)^2b^2 & -ab(-a+a^2-b^2) \\ -a(a^2-2a^3+a^4+2b^2-4ab^2+2a^2b^2+b^4) & -ab(-a+a^2-b^2) & a^2(-a+a^2+b^2)^2 \end{pmatrix}$$

Invariantes :

$$\text{Det} \left[\begin{pmatrix} (-a+a^2-b^2)^2 & (-1+2a)b(-a+a^2-b^2) \\ (-1+2a)b(-a+a^2-b^2) & (-1+2a)^2b^2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$b(-a+a^2-b^2)(-1+2a) \text{Det} \left[\begin{pmatrix} (-a+a^2-b^2) & (-1+2a)b \\ (-a+a^2-b^2) & (-1+2a)b \end{pmatrix} \right] = 0$$

Se trata de una PARÁBOLA tangente a los lados AC y AB como puede verse fácilmente al resolver este **sencillo** sistema de ecuaciones :

Cónica y recta AB

$$\text{Solve}[bx + (1-a)y = b, a^4 - 2a^5 + a^6 - 2a^3b^2 + 2a^4b^2 + a^2b^4 - 2a^3x + 4a^4x - 2a^5x - 4ab^2x + 8a^2b^2x - 4a^3b^2x - 2ab^4x + a^2x^2 - 2a^3x^2 + a^4x^2 + 2ab^2x^2 - 2a^2b^2x^2 + b^4x^2 + 2a^2by - 2a^3by + 2ab^3y + 2abxy - 6a^2bxy + 4a^3bxy + 2b^3xy - 4ab^3xy + b^2y^2 - 4ab^2y^2 + 4a^2b^2y^2 = 0], \{x, y\} \rightarrow$$

$$T_1 = \left\{ \frac{a^2 - 2a^3 + a^4 + b^2 - ab^2 + a^2b^2}{a(1-2a+a^2+b^2)}, \frac{(-1+a)b(-a+a^2+b^2)}{a(1-2a+a^2+b^2)} \right\}$$

Cónica y recta AC

Solve[$b x - a y == 0$, $a^4 - 2 a^5 + a^6 - 2 a^3 b^2 + 2 a^4 b^2 + a^2 b^4 - 2 a^3 x + 4 a^4 x - 2 a^5 x - 4 a b^2 x + 8 a^2 b^2 x - 4 a^3 b^2 x - 2 a b^4 x + a^2 x^2 - 2 a^3 x^2 + a^4 x^2 + 2 a b^2 x^2 - 2 a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2 + 2 a^2 b y - 2 a^3 b y + 2 a b^3 y + 2 a b x y - 6 a^2 b x y + 4 a^3 b x y + 2 b^3 x y - 4 a b^3 x y + b^2 y^2 - 4 a b^2 y^2 + 4 a^2 b^2 y^2 == 0$], {x, y}] →

$$T_2 = \left\{ \frac{-a^3 + a^4 + a^2 b^2}{(-1 + a)(a^2 + b^2)}, \frac{-a^2 b + a^3 b + a b^3}{(-1 + a)(a^2 + b^2)} \right\}$$

Vamos a ver, no obstante, algún ejemplo práctico.

Caso_ 1 : {a = 2, b = 3}

Recta AB : $b x + (1 - a) y == b$; Recta AB : $3 x - y == 3$

Recta AC : $b x - a y == 0$; Recta AC : $3 x - 2 y == 0$

Parábola :

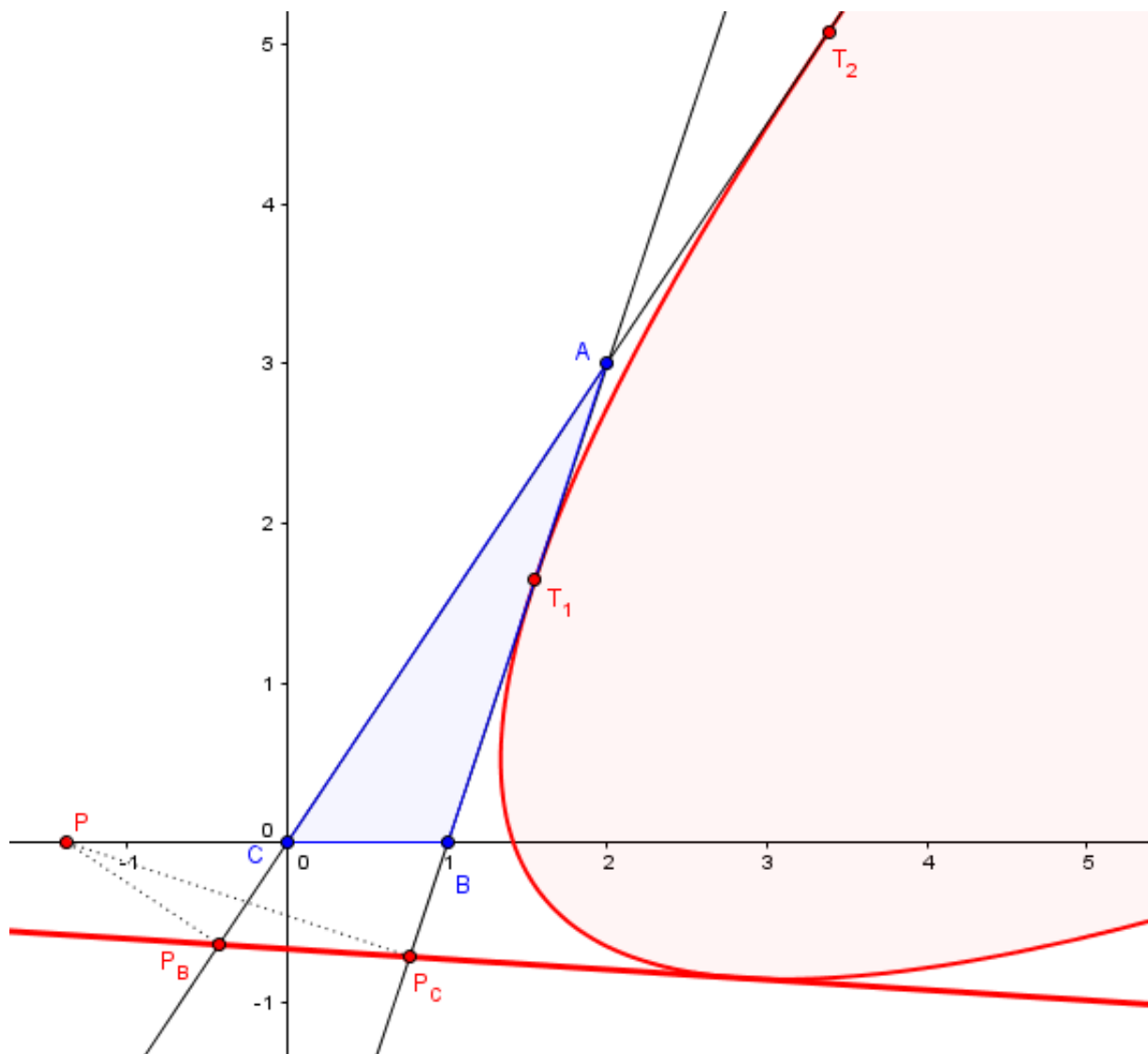
$$a^4 - 2 a^5 + a^6 - 2 a^3 b^2 + 2 a^4 b^2 + a^2 b^4 - 2 a^3 x + 4 a^4 x - 2 a^5 x - 4 a b^2 x + 8 a^2 b^2 x - 4 a^3 b^2 x - 2 a b^4 x + a^2 x^2 - 2 a^3 x^2 + a^4 x^2 + 2 a b^2 x^2 - 2 a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2 + 2 a^2 b y - 2 a^3 b y + 2 a b^3 y + 2 a b x y - 6 a^2 b x y + 4 a^3 b x y + 2 b^3 x y - 4 a b^3 x y + b^2 y^2 - 4 a b^2 y^2 + 4 a^2 b^2 y^2 == 0 \text{ /. } \{a \rightarrow 2, b \rightarrow 3\}; 484 - 412 x + 49 x^2 + 84 y - 126 x y + 81 y^2 == 0$$

$$T_1 = \left\{ \frac{a^2 - 2 a^3 + a^4 + b^2 - a b^2 + a^2 b^2}{a(1 - 2 a + a^2 + b^2)}, \frac{(-1 + a) b (-a + a^2 + b^2)}{a(1 - 2 a + a^2 + b^2)} \right\} \text{ /. } \{a \rightarrow 2, b \rightarrow 3\}$$

$$T_1 = \left\{ \frac{31}{20}, \frac{33}{20} \right\}$$

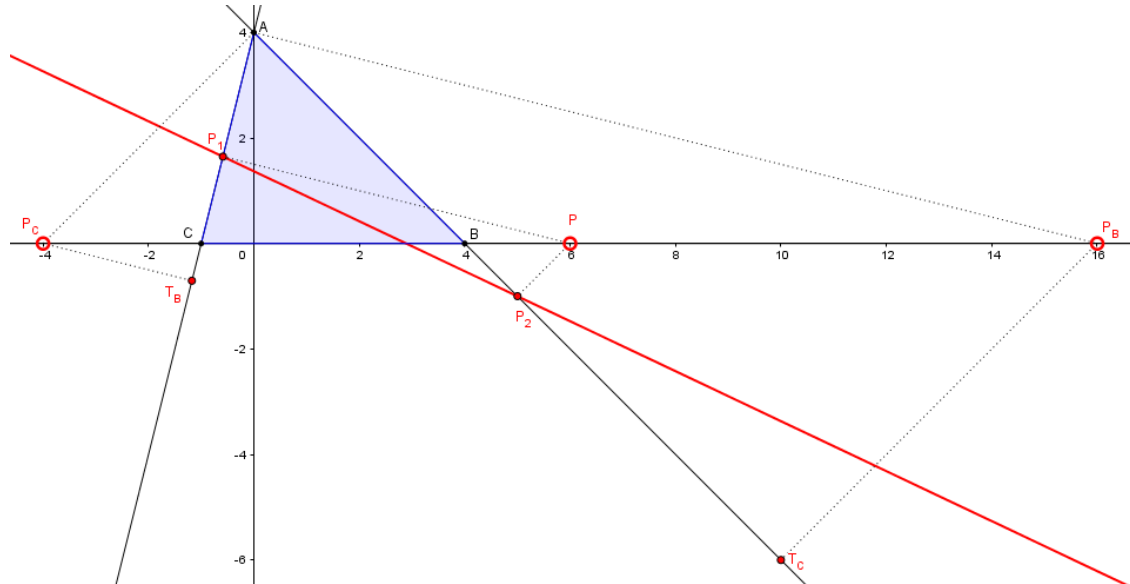
$$T_2 = \left\{ \frac{-a^3 + a^4 + a^2 b^2}{(-1+a)(a^2+b^2)}, \frac{-a^2 b + a^3 b + a b^3}{(-1+a)(a^2+b^2)} \right\} /. \{a \rightarrow 2, b \rightarrow 3\}$$

$$T_2 = \left\{ \frac{44}{13}, \frac{66}{13} \right\}$$



Caso_ 2 : $A = \{0, 4\}$, $B = \{4, 0\}$, $C = \{-1, 0\}$

Método analítico :



$$P = (t, 0); t \in \mathbb{R}$$

$$A = \{0, 4\}, B = \{4, 0\}, C = \{-1, 0\}$$

$$\text{Ecuación Recta AC : } 4x - y = -4$$

$$\text{Ecuación Recta AB : } x + y = 4$$

$$P_B = \left\{ \frac{t - 16}{17}, \frac{4t + 4}{17} \right\}; P_C = \left\{ \frac{t + 4}{2}, \frac{4 - t}{2} \right\} \rightarrow$$

$$\text{Recta } P_B P_C : (-12 + 5t)x + (20 + 3t)y = 16 + t^2$$

$$\text{Envolvente de las rectas } (-12 + 5t)x + (20 + 3t)y = 16 + t^2, t \in \mathbb{R}$$

$$(-12 + 5t)x + (20 + 3t)y = 16 + t^2$$

$$\partial_t ((-12 + 5t)x + (20 + 3t)y - 16 - t^2 = 0) \rightarrow -2t + 5x + 3y = 0$$

$$\text{Solve}[-2t + 5x + 3y = 0, t] \rightarrow \left\{ t \rightarrow \frac{1}{2}(5x + 3y) \right\}$$

$$(-12 + 5t)x + (20 + 3t)y = 16 + t^2 / . t \rightarrow \frac{1}{2}(5x + 3y)$$

$$y \left(20 + \frac{3}{2}(5x + 3y) \right) + x \left(-12 + \frac{5}{2}(5x + 3y) \right) = 16 + \frac{1}{4}(5x + 3y)^2$$

La Envolvente de las rectas es una Cónica de ecuación :

$$25x^2 + 6x(-8 + 5y) + y(80 + 9y) = 64;$$

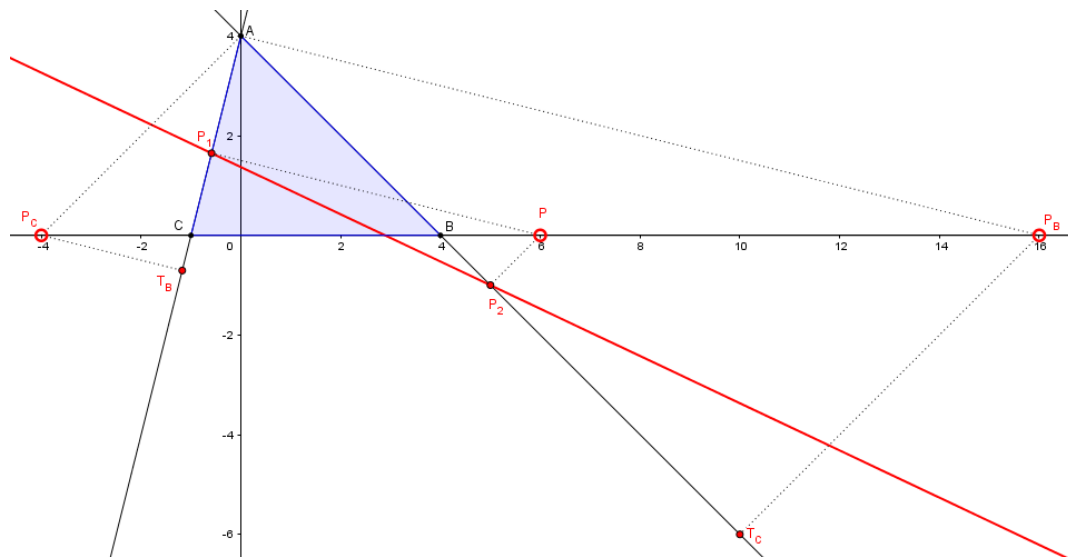
$$-48x + 25x^2 + 80y + 30xy + 9y^2 = 64$$

Cónica que, expresada en forma matricial, será de la forma :

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 15 & -24 \\ 15 & 9 & 40 \\ -24 & 40 & -64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Det} \left[\begin{pmatrix} 25 & 15 & -24 \\ 15 & 9 & 40 \\ -24 & 40 & -64 \end{pmatrix} \right] = -73\,984 \neq 0; \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} \right] = 0 \rightarrow \text{PARÁBOLA}$$

Método geométrico :



$$P = (6, 0)$$

$$A = \{0, 4\}, B = \{4, 0\}, C = \{-1, 0\}$$

$$\text{Ecuación Recta AC} : 4x - y = -4$$

$$\text{Ecuación Recta AB} : x + y = 4$$

$$* P_1 : \{ \text{Recta AC} \cap \text{Recta Perpendicular a AC por P} \}$$

$$\text{Solve}[\{4x - y = -4, x + 4y = 6\}, \{x, y\}] \rightarrow P_1 = \left\{ \frac{-10}{17}, \frac{28}{17} \right\}$$

$$P_2 : \{ \text{Recta AB} \cap \text{Recta Perpendicular a AB por P} \}$$

$$\text{Solve}[\{x + y = 4, x - y = 6\}, \{x, y\}] \rightarrow P_2 = \{5, -1\}$$

$$\text{Recta } P_1 P_2 : 9x + 19y = 26$$

Hallamos ahora los puntos de tangencia de la cónica sobre los lados AB y AC :

Para ello debemos determinar los puntos P_C y P_B , respectivamente :

$$* P_C : \{ \text{Recta Perpendicular a AB por A} \cap y = 0 \}$$

$$P_C : \{ x - y = -4 \cap y = 0 \} \rightarrow P_C = \{-4, 0\}$$

$$T_B : \{ \text{Recta AC} \cap \text{Recta Perpendicular a AC por } P_C \}$$

$$T_B : \{ 4x - y = -4 \cap x + 4y = -4 \}$$

$$\text{Solve}[\{4x - y = -4, x + 4y = -4\}, \{x, y\}] \rightarrow T_B = \left\{ -\frac{20}{17}, -\frac{12}{17} \right\}$$

$$* P_B : \{ \text{Recta Perpendicular a AC por A} \cap y = 0 \}$$

$$P_B : \{x + 4y = 16 \cap y = 0\} \rightarrow P_B = \{16, 0\}$$

$$T_C : \{\text{Recta AB} \cap \text{Recta Perpendicular a AB por } P_B\}$$

$$T_C : \{x + y = 4 \cap x - y = 16\}$$

$$\text{Solve}[\{x + y = 4, x - y = 16\}, \{x, y\}] \rightarrow T_C = \{10, -6\}$$

La cónica pertenece al haz de cónicas generado por los puntos de contacto, T_B y T_C y sus respectivas tangentes, los lados AC y AB.

$$\text{Haz} : \alpha (\text{Recta } T_B T_C)^2 + \beta (\text{Recta AC} \cdot \text{Recta AB}) = 0$$

$$T_B = \left\{-\frac{20}{17}, -\frac{12}{17}\right\}, T_C = \{10, -6\} \rightarrow \text{Recta } T_B T_C : 24 + 9x + 19y = 0$$

$$\text{Haz} : \alpha (24 + 9x + 19y)^2 + \beta (4x - y + 4)(x + y - 4) = 0$$

$$\alpha (24 + 9x + 19y)^2 + \beta (4x - y + 4)(x + y - 4) = 0$$

$$576\alpha + 432x\alpha + 81x^2\alpha + 912y\alpha + 342xy\alpha + 361y^2\alpha - 16\beta - 12x\beta + 4x^2\beta + 8y\beta + 3xy\beta - y^2\beta = 0$$

Como la Recta $P_1 P_2 : 9x + 19y = 26$ ha de ser tangente a esta cónica entonces solamente puede tener un punto de contacto o intersección con ella.

$$\alpha (24 + 9x + 19y)^2 + \beta (4x - y + 4)(x + y - 4) = 0 \text{ / } y \rightarrow \frac{26 - 9x}{19}$$

$$18050\alpha - 50\beta - 75x\beta + 17x^2\beta = 0 \rightarrow$$

El Discriminante de esta ecuación de Segundo Grado ha de ser nulo

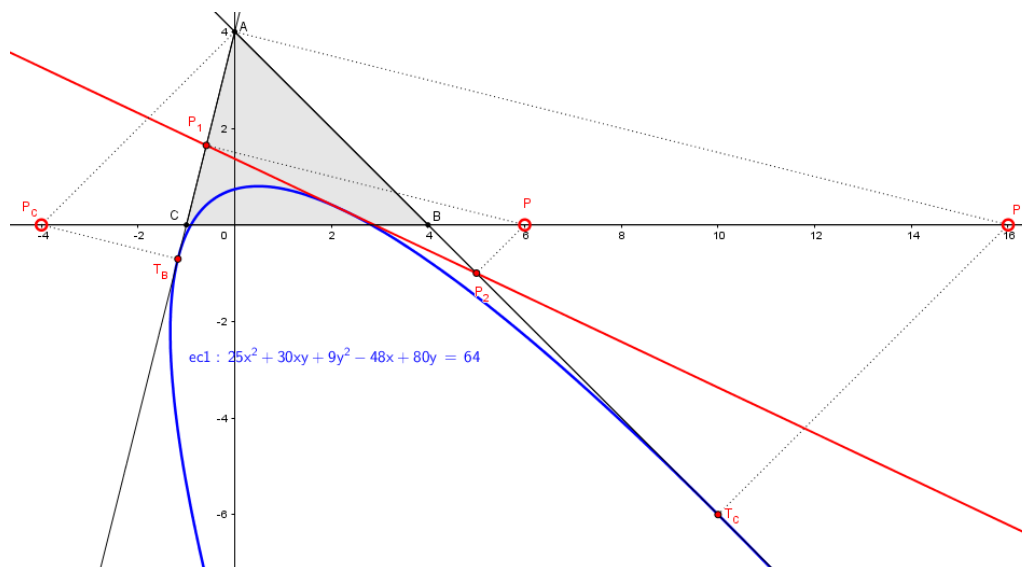
$$\Delta = 0; \Delta = (-75\beta)^2 - 4 \times 17\beta (18050\alpha - 50\beta) = 0 \rightarrow 136\alpha\beta = \beta^2$$

$$136\alpha\beta = \beta^2; (\beta \neq 0) \rightarrow 136\alpha = \beta; \{\alpha = 1, \beta = 136\}$$

$$\alpha (24 + 9x + 19y)^2 + \beta (4x - y + 4)(x + y - 4) = 0 \text{ / } \{\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 136\}$$

$$136(4 + 4x - y)(-4 + x + y) + (24 + 9x + 19y)^2 = 0$$

$$-64 + 25x^2 + 80y + 9y^2 - 48x + 30xy = 0$$



- En definitiva, la envolvente de esas rectas es una PARÁBOLA perteneciente al Haz de cónicas determinado por los puntos de tangencia T_B y T_C situados sobre los lados AC y AB del triángulo dado.