

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 994. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Sea ABC un triángulo. Elegido un punto P de la recta BC , se construye la recta r que pasa por los puntos proyección ortogonal de P sobre las rectas AB y AC . Probar que dichas rectas envuelven una cónica. ¿Qué tipo de cónica es la curva envuelta?. Hallarla.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $P = (0 : p : 1 - p)$ ($p \in \mathbb{R}$), entonces, los puntos proyección ortogonal de P sobre las rectas AB y AC son:

$$\begin{cases} U = ((1-p)S_B : S_A + pS_B : 0) \\ V = (pS_C : 0 : 2b^2 - pS_C) \end{cases}$$

por lo que:

$$UV \equiv (2b^2 - pS_C)(S_A + pS_B)x - (1-p)S_B(2b^2 - pS_C)y - pS_C(S_A + pS_B)z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro p del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a p :

$$\begin{cases} 0 = (2b^2 - pS_C)(S_A + pS_B)x - (1-p)S_B(2b^2 - pS_C)y - pS_C(S_A + pS_B)z \\ 0 = [S_B(2b^2 - pS_C) - S_C(S_A + pS_B)]x + S_B[(1-2p)S_C + 2b^2]y - S_C[S_A + 2pS_B]z \end{cases} \quad (p \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando p en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$4S^4x^2 + 4S_A^2S_B^2y^2 + 4S_A^2S_C^2z^2 + 4S^2S_AS_Bxy + 4S^2S_AS_Cxz + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 6b^2c^2 + c^4)S_BS_Cyz = 0$$

que es de tipo parabólico, ya que su discriminante es $\Delta = 0$. Además, como el determinante de su matriz asociada es:

$$\begin{vmatrix} 8S^4 & 4S^2S_AS_B & 4S^2S_AS_C \\ 4S^2S_AS_B & 8S_A^2S_B^2 & (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 6b^2c^2 + c^4)S_BS_C \\ 4S^2S_AS_C & (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 6b^2c^2 + c^4)S_BS_C & 8S^2S_AS_B \end{vmatrix} = -256b^4c^4S_B^2S_C^2$$

vamos a distinguir tres casos:

- ① Si $S_B = 0$ (es decir, cuando el triángulo ABC es rectángulo en B), esta cónica es degenerada, tratándose de una recta doble, cuya ecuación es:

$$(x+z)^2 = 0$$

y corresponde a la recta paralela a AC pasando por el punto B .

- ② Si $S_C = 0$ (es decir, cuando el triángulo ABC es rectángulo en C), esta cónica es degenerada, tratándose de una recta doble, cuya ecuación es:

$$(x+y)^2 = 0$$

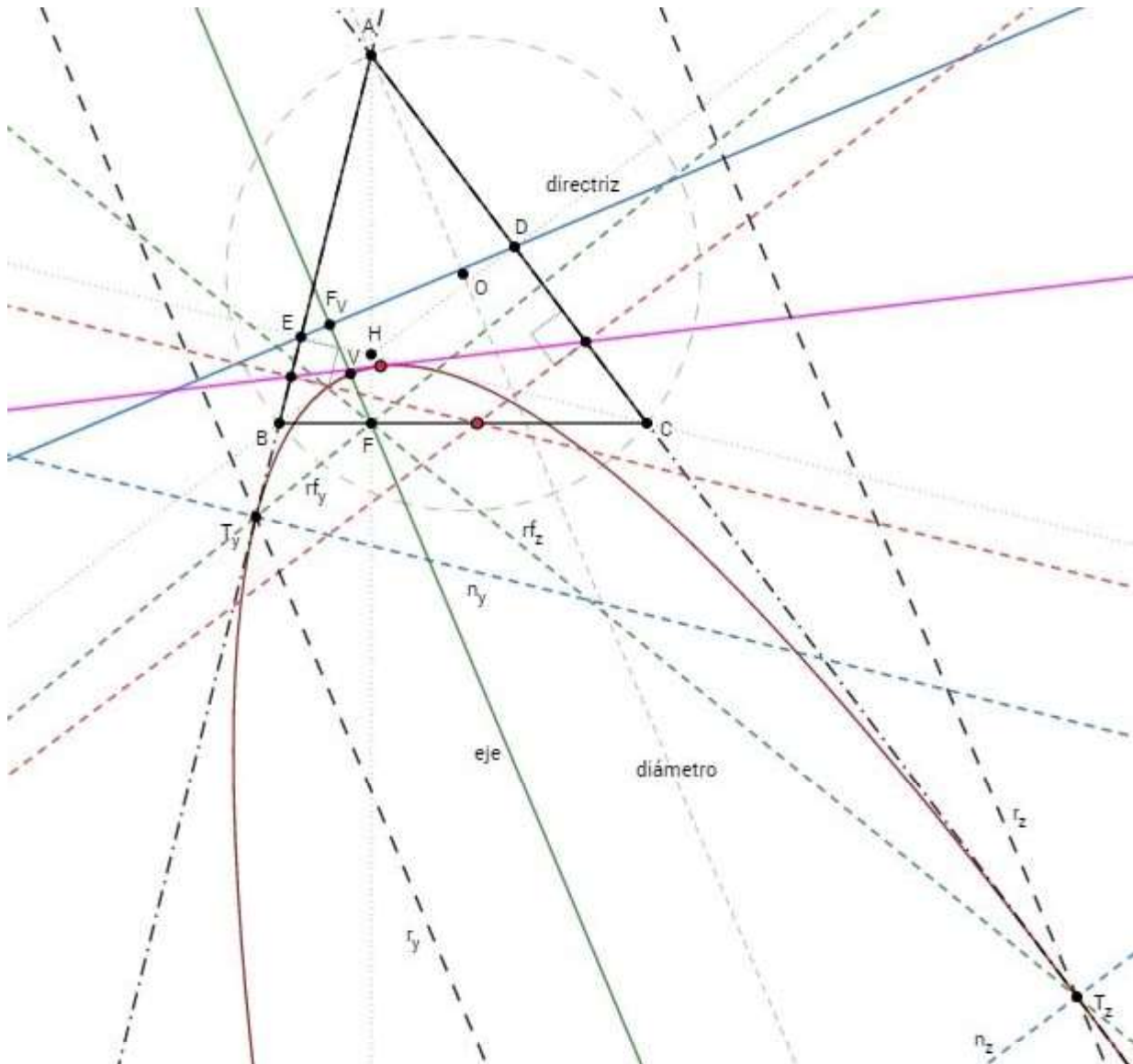
y corresponde a la recta paralela a AB pasando por el punto C .

TRIÁNGULOS CABRI

- ③ Si $S_B S_C \neq 0$ (es decir, cuando el triángulo ABC no es rectángulo ni en B ni en C), esta cónica es no degenerada, tratándose de una parábola, cuyo único punto en la recta del infinito es su centro (conjugado de la recta del infinito) $Q = (b^2 S_B + c^2 S_C : -b^2 S_B : -c^2 S_C)$, que coincide con el punto del infinito de la ceviana correspondiente al vértice A del circuncentro $O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$ del triángulo ABC , cuya ecuación es:

$$c^2 S_C y - b^2 S_B z = 0$$

y, por tanto, los diámetros de esta parábola son paralelos a dicha ceviana.



TRIÁNGULOS CABRI

Además:

- ❶ Esta parábola corta a la recta AB únicamente en el punto $T_y = (S_B S_C : S^2 : 0)$, por lo que es tangente a ella en este punto, siendo las ecuaciones del rayo paralelo al eje de la parábola que incide en ella en el punto T_y y de la recta normal a la parábola en dicho punto las siguientes:

$$\begin{cases} r_y \equiv 0 = 4S^2x + 4S_A S_B y - (a^4 - 4a^2b^2 + 3b^4 - 2a^2c^2 - 4b^2c^2 + c^4)z \\ n_y \equiv 0 = S^2x + S_A S_B y + 2b^2 S_B z \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la recta reflexión de la recta r_y sobre la recta n_y es:

$$rf_y \equiv S^2x + S_A S_B y - S_A S_C z = 0$$

- ❷ Esta parábola corta a la recta AC únicamente en el punto $T_z = (S_B S_C : S^2 : 0)$, por lo que es tangente a ella en este punto, siendo las ecuaciones del rayo paralelo al eje de la parábola que incide en ella en el punto T_z y de la recta normal a la parábola en dicho punto las siguientes:

$$\begin{cases} r_z \equiv 0 = 4S^2x - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2c^2 - 4b^2c^2 + 3c^4)y + 4S_A S_C z \\ n_z \equiv 0 = S^2x + 2c^2 S_C y + S_A S_C z \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la recta reflexión de la recta r_z sobre la recta n_z es:

$$rf_z \equiv S^2x - S_A S_B y + S_A S_C z = 0$$

- ❸ Las coordenadas del foco F de esta parábola están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = S^2x + S_A S_B y - S_A S_C z \\ 0 = S^2x - S_A S_B y + S_A S_C z \end{cases} \Rightarrow F = (0 : S_C : S_B)$$

y, por tanto, dicho foco es el pie de la altura correspondiente al vértice A del triángulo ABC , siendo su eje el diámetro que pasa por el foco, cuya ecuación es:

$$2(b-c)(b+c)S^2x + (-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)S_B y - (-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)S_C z = 0$$

- ❹ Las coordenadas del vértice V de esta parábola están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 2(b-c)(b+c)S^2x + (-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)S_B y - (-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)S_C z \\ 0 = 4S^4x^2 + 4S_A^2S_B^2y^2 + 4S_A^2S_C^2z^2 + 4S^2S_A S_B xy + 4S^2S_A S_C xz + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 6b^2c^2 + c^4)S_B S_C yz \end{cases}$$

por lo que:

$$V = (S_B S_C (a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4) : 2b^2 S_C S : 2c^2 S_B S)$$

- ❺ Como el punto simétrico del punto F respecto del punto V es:

$$F_V = (S_B S_C (a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4) : -b^2 S_C (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4) : -c^2 S_B (a^4 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4))$$

TRIÁNGULOS CABRI

y la directriz de esta parábola es la recta perpendicular a su eje pasando por este punto, entonces la ecuación de ésta es:

$$S_A x - S_B y - S_C z = 0$$

siendo sus puntos de intersección con las rectas AB y AC :

$$\begin{cases} E = \text{directriz} \cap AB = (S_B : S_A : 0) \\ D = \text{directriz} \cap AC = (S_C : 0 : S_A) \end{cases}$$

es decir, los pies de las alturas correspondientes a los vértices C y B , respectivamente, del triángulo ABC .

Finalmente, para construir trazamos las tres alturas del triángulo ABC y hallamos los puntos D , E y F , siendo el punto F su foco y la recta DE su directriz, por lo que ya podemos construir la parábola.