

Quincena del 1 de abril al 15 de Mayo de 2021.

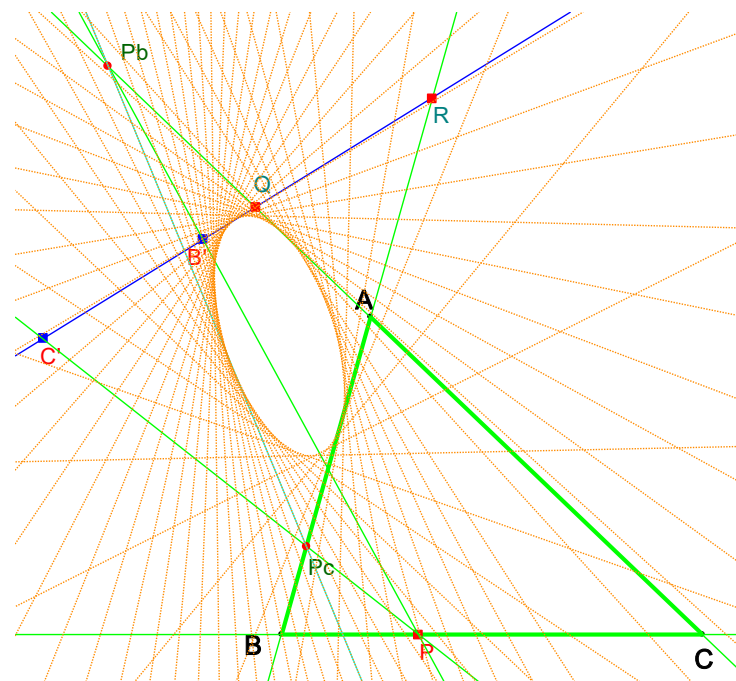
Propuesto por Antonio Casas Pérez, profesor jubilado del Departamento de Matemática Aplicada al Urbanismo, a la Edificación y al Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Madrid

Problema 994.- Sea ABC un triángulo. Elegido un punto P de la recta BC , se construye la recta r que pasa por los puntos proyección ortogonal de P sobre las rectas AB y AC . Probar que dichas rectas envuelven una cónica. ¿Qué tipo de cónica es la curva envuelta? Hallarla.

Casas. A. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Ponemos un gráfico de una situación más general: tomamos la recta auxiliar $B'C'$. R y Q son los puntos de intersección



de las rectas AB y AC con esa recta auxiliar (y T , fuera de la gráfica, es el punto de intersección con el lado BC del triángulo). Elegido P sobre BC , vamos a proyectarlo desde C' sobre AB en el punto P_c y desde B' sobre AC en el punto P_b . Con estos puntos formamos la recta P_bP_c . Se puede considerar que hemos definido una proyectividad entre las rectas AB y AC en la que se corresponden los puntos P_c y P_b . El lugar geométrico descrito por ella a moverse P sobre BC es una cónica tangente a los lados AB y AC del triángulo que sirven para su definición.

Veamos cómo encontrar otras tres tangentes a esta cónica.

Si $P = B$ se considera como punto de BC , su proyección desde C' sobre AB es otra vez B y su proyección desde B' sobre AC es otro punto B'' . La recta $BB'' = BB'$ pertenece al lugar.

Si $P = C$ se considera en BC , su proyección desde C' sobre AB es el punto C'' y su proyección desde

B' sobre AC es otra vez C . La recta $CC'' = CC'$ también pertenece al lugar.

Las rectas base de la proyectividad, AB y AC , también forman parte del lugar geométrico.

Si $P = BC \cap B'C' = T$ su proyección desde C' sobre AB es el punto R y su proyección desde B' sobre AC es el punto Q . Tenemos pues que la recta auxiliar $B'C'$ es una recta del lugar.

Así pues tenemos 5 tangentes a esta cónica: AB y AC , lados del triángulo; BB' y CC' y la recta auxiliar $B'C'$.

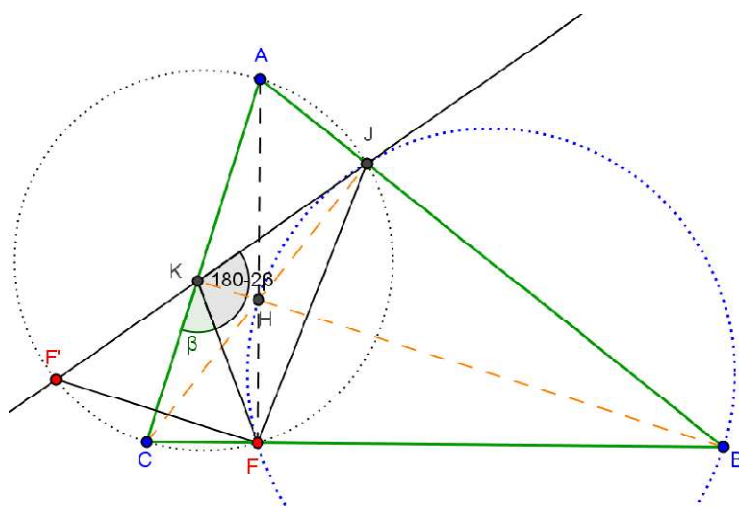
Si la recta auxiliar se toma como recta del infinito ya tenemos definida la cónica: es una parábola. La proyectividad definida consiste en trazar paralelas a una dirección.

En el ejemplo del enunciado, los puntos B', C' son las direcciones de las rectas perpendiculares a los lados AC y AB respectivamente. Por tanto, la parábola queda definida como tangente a estas rectas, a los lados AB y AC y a las alturas desde B y desde C .

Para **construir esta parábola** nos apoyaremos en dos propiedades básicas:

1.- Las circunferencia circunscrita al triángulo definido por tres tangentes pasa por el foco.

Con las cuatro tangentes (más la recta del infinito) podemos formar cuatro triángulos. Sus circunferencias circunscritas tienen como centro radical el foco de la parábola.



La circunferencia (ACJ) tiene diámetro AC . Los ángulos $\angle AJC$ y $\angle AFC$ son rectángulos, luego F está sobre ella. De forma similar para la circunferencia (BJH) .

2.- El simétrico del foco respecto de una tangente pertenece a la directriz de la parábola. Con dos de las tangentes es suficiente para construir esa directriz y tener ya completamente formada la parábola del lugar geométrico.

Sea F' el simétrico de F respecto del lado AC . Como $\angle FKJ = 180 - \beta$ y $\angle KFC = \beta$ resulta que AC es la bisectriz del ángulo $F'KF$ y por tanto F' está situado sobre la recta JK . Esta es la recta directriz y aquí se acaba este problema. ■