

# TRIÁNGULOS CABRI

**Problema 995.** (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo  $ABC$ , vamos a considerar una orientación en las rectas  $BA$  y  $CA$ , de forma que:

☒ Si un punto  $Z$  está situado sobre la recta  $BA$ , entonces:

$$\begin{cases} BZ > 0 & \text{si } Z \text{ está situado en el semiplano definido por la recta } BC \text{ que contiene al punto } A \\ BZ < 0 & \text{si } Z \text{ está situado en el semiplano definido por la recta } BC \text{ que no contiene al punto } A \end{cases}$$

☒ Si un punto  $Z$  está situado sobre la recta  $CA$ , entonces:

$$\begin{cases} CZ > 0 & \text{si } Z \text{ está situado en el semiplano definido por la recta } BC \text{ que contiene al punto } A \\ CZ < 0 & \text{si } Z \text{ está situado en el semiplano definido por la recta } BC \text{ que no contiene al punto } A \end{cases}$$

De esta forma, si  $M$  es un punto situado sobre la recta  $BA$  y  $N$  es un punto situado sobre la recta  $CA$ , determinar y representar gráficamente (de forma razonada) la envolvente de las rectas  $MN$  tales que  $BM + CN = a$ .

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo  $ABC$ , si:

$$\begin{cases} M = (m : c - m : 0) \\ N = (a - m : 0 : b - a + m) \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

entonces:

$$MN \equiv (m - a + b)(m - c)x + (m - a + b)my + (m - a)(m - c)z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro  $m$  del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a  $m$ :

$$\begin{cases} 0 = (m - a + b)(m - c)x + (m - a + b)my + (m - a)(m - c)z \\ 0 = (2m - a + b - c)x + (2m - a + b)y + (2m - a - c)z \end{cases}$$

por lo que, despejando  $m$  en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$(-a + b + c)^2 x^2 + (a - b)^2 y^2 + (a - c)^2 z^2 + 2(b - a)(-a + b + c)xy + 2(c - a)(-a + b + c)xz + 2(a^2 - ab - ac - bc)yz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} (-a + b + c)^2 & (b - a)(-a + b + c) & (c - a)(-a + b + c) \\ (b - a)(-a + b + c) & (a - b)^2 & a^2 - ab - ac - bc \\ (c - a)(-a + b + c) & a^2 - ab - ac - bc & (a - c)^2 \end{vmatrix} = -4b^2 c^2 (-a + b + c)^2 \neq 0$$

# TRIÁNGULOS CABRI

y su discriminante es  $\Delta = 0$ , por lo que su único punto en la recta del infinito es su centro (conjugado de la recta del infinito)  $W = (b+c : -b : -c)$ , que coincide con el punto del infinito de la bisectriz interior correspondiente al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ , cuya ecuación es:

$$cy - bz = 0$$

Además, esta bisectriz corta a la parábola en el punto:

$$V = (a(b+c) - (b-c)^2 : b(-a+b+c) : c(-a+b+c))$$

de forma que la recta tangente a la parábola en este punto:

$$t_V \equiv (-a+b+c)x - (a-b+c)y - (a+b-c)z = 0$$

tiene el mismo punto del infinito  $t_V^\infty = (b-c : -b : c)$  que la bisectriz exterior correspondiente al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ , cuya ecuación es:

$$cy + bz = 0$$

lo cual significa que la recta  $t_V$  es perpendicular al eje de la parábola y, por tanto, el punto  $V$  es el vértice de ésta y la bisectriz interior correspondiente al vértice  $A$  es su eje, siendo, además:

$$\begin{cases} Q = t_V \cap AB = (a+b-c : 0 : -a+b+c) \\ T = t_V \cap AC = (a-b+c : -a+b+c : 0) \end{cases}$$

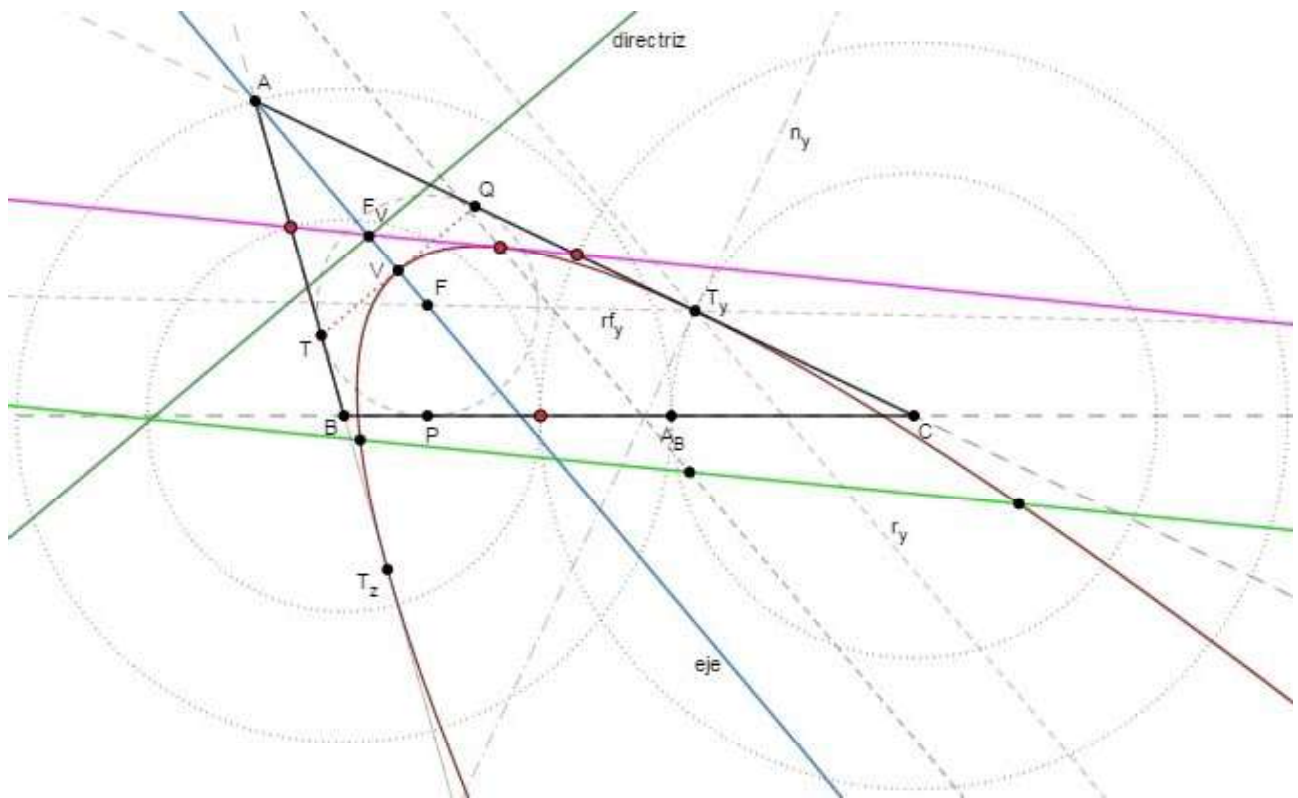
los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo  $ABC$  con las rectas  $AB$  y  $AC$ , respectivamente. A continuación, como las rectas  $AB$  y  $AC$  cortan a la parábola en único punto:

$$\begin{cases} T_z = AB \cap \text{parábola} = (a-b : -a+b+c : 0) \\ T_y = AC \cap \text{parábola} = (a-c : 0 : -a+b+c) \end{cases}$$

entonces, estas dos rectas son tangentes a la parábola en dichos puntos y, si  $r_y$  es el rayo paralelo al eje de la parábola que incide en ella en el punto  $T_y$ , la reflexión  $rf_y$  de  $r_y$  sobre la recta  $n_y$  normal a la parábola (perpendicular al lado  $AC$ ) en el punto  $T_y$  corta al eje de la parábola en el foco  $F$  de ésta, siendo el punto  $F_V$  el punto simétrico del punto  $F$  respecto del punto  $V$  y la directriz de la parábola la recta perpendicular a su eje pasando por el punto  $F_V$ . Por tanto, para construir esta parábola, haremos lo siguiente, suponiendo que  $a > c$  (en caso contrario, se razonaría de forma totalmente análoga):

- ☺ Como  $T_y = \left(\frac{a-c}{b} : 0 : \frac{-a+b+c}{b}\right)$  es el punto situado el segmento  $CA$  a una distancia  $\left(\frac{a-c}{b}\right)b = a-c$  del punto  $C$ , para construirlo, con centro en el punto  $B$ , giramos el punto  $A$  hasta el punto  $A_B$ , situado sobre el segmento  $BC$  a una distancia  $a-c$  del punto  $C$ , y, después, con centro en el punto  $C$ , giramos el punto  $A_B$  hasta el punto  $T_y$ .
- ☺ Podemos construir el vértice  $V$  de la parábola intersecando la recta  $QT$  con la bisectriz interior correspondiente al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ .
- ☺ Podemos construir el foco  $F$  y la directriz de la parábola según se ha descrito anteriormente. Por tanto, ya podemos construir la parábola.

# TRIÁNGULOS CABRI



**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**  
16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021