

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 996. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados un triángulo ABC tal que el vértice A está situado sobre el óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos B y C y cuyo producto de distancias es igual a BC^2 y un punto P , se consideran el punto E de intersección entre la ceviana correspondiente al vértice B y la recta AC y el punto F de intersección entre la ceviana correspondiente al vértice C y la recta AB . Probar que:

- ① El lugar geométrico que debe describir el punto P para que $AE \cdot AF = BC^2$ es la unión de una recta y una cónica, representando (de forma razonada) gráficamente dicho lugar geométrico.
- ② La recta polar del punto A respecto de la cónica incluida en dicho lugar geométrico es paralela a la recta BC .
- ③ Si T_1 y T_2 son los puntos de tangencia de las tangentes a dicha cónica trazadas desde el punto A , entonces:

$$(AT_1T_2) = 2\sqrt{2} (ABC)$$

Solución:

- ① Como:

$$bc = AC \cdot AB = BC^2 = a^2$$

considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $P = (u : v : w)$ ($u + v + w > 0$), entonces:

$$\begin{cases} E = (u : 0 : w) \\ F = (u : v : 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE^2 = \frac{b^2 w^2}{(u + w)^2} \\ AF^2 = \frac{c^2 v^2}{(u + v)^2} \end{cases}$$

por lo que, como:

$$AF \cdot AE = BC^2 \Leftrightarrow AF^2 AE^2 = a^4 = b^2 c^2$$

entonces:

$$AF \cdot AE = BC^2 \Leftrightarrow 0 = \frac{bc(u + v + w)u(u^2 + uv + uw + 2vw)}{(u + v)^2(u + w)^2}$$

lo cual significa que el punto P ha de estar situado sobre la recta BC o sobre la cónica cuya ecuación es:

$$x^2 + xy + xz + 2yz = 0$$

que es una hipérbola, cuyo centro (conjugado de la recta del infinito) es el punto medio $L = (0 : 1 : 1)$ del segmento BC , ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

y tiene dos puntos en la recta del infinito, cuyas coordenadas vienen dadas por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x^2 + xy + xz + 2yz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (1 : -1 : 0) = AB_{\infty} \\ I_2 = (1 : 0 : -1) = AC_{\infty} \end{cases}$$

lo cual significa que sus asíntotas son las rectas paralelas a los lados AB y AC pasando por el punto L . Además:

- ☺ Esta hipérbola corta a la recta BC , cuya ecuación es $x = 0$, en los puntos $B = (0 : 1 : 0)$ y $C = (0 : 0 : 1)$, simétricos uno del otro respecto del punto L .
 - ☺ Esta hipérbola corta a la mediana correspondiente al vértice B del triángulo ABC , cuya ecuación es $x - z = 0$, en el punto $B = (0 : 1 : 0)$ y en el punto medio $U = (3 : -2 : 3)$ del segmento MB' , siendo $M = (1 : 0 : 1)$ el punto medio del segmento AC y $B' = (1 : -1 : 1)$ el punto simétrico del punto B respecto del punto M . Por tanto, esta hipérbola también pasa por el punto U' simétrico del punto U respecto del punto L .
 - ☺ Esta hipérbola corta a la mediana correspondiente al vértice C del triángulo ABC , cuya ecuación es $x - y = 0$, en el punto $C = (0 : 0 : 1)$ y en el punto medio $V = (3 : 3 : -2)$ del segmento NC' , siendo $N = (1 : 1 : 0)$ el punto medio del segmento AB y $C' = (1 : 1 : -1)$ el punto simétrico del punto C respecto del punto N . Por tanto, esta hipérbola también pasa por el punto V' simétrico del punto V respecto del punto L .
- ② Como la ecuación de la recta polar del punto A respecto de esta hipérbola es:

$$p_A \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x + y + z$$

entonces, su punto del infinito es $p_A^{\infty} = (0 : -1 : 1) = BC_{\infty}$, por lo que esta recta es paralela a la recta BC y, además, pasa por el punto $A' = (-1 : 1 : 1)$ simétrico del punto A respecto del punto L .

- ③ Como los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la hipérbola trazadas desde el punto A están determinados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x^2 + xy + xz + 2yz \\ 0 = 2x + y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = (-2 : 2 + \sqrt{2} : 2 - \sqrt{2}) \\ T_2 = (-2 : 2 - \sqrt{2} : 2 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

entonces:

$$\frac{(AT_1T_2)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \\ -2 & 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \end{vmatrix}}{4} = 2\sqrt{2}$$

The diagram shows a green circle tangent to two red lines and a blue line. A point A is on the circle. A line segment AB is drawn, and a perpendicular bisector of AB is shown. A line segment AC is drawn, and a perpendicular bisector of AC is shown. The intersection of these two perpendicular bisectors is the center of the circle, labeled L. A line segment AL is drawn, and a perpendicular bisector of AL is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through L perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled M. A line segment AM is drawn, and a perpendicular bisector of AM is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through M perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled N. A line segment AN is drawn, and a perpendicular bisector of AN is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through N perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled U. A line segment AU is drawn, and a perpendicular bisector of AU is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through U perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled V. A line segment AV is drawn, and a perpendicular bisector of AV is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through V perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled U'. A line segment AU' is drawn, and a perpendicular bisector of AU' is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through U' perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled T1. A line segment AT1 is drawn, and a perpendicular bisector of AT1 is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through T1 perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled T2. A line segment AT2 is drawn, and a perpendicular bisector of AT2 is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through T2 perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled A'. A line segment AA' is drawn, and a perpendicular bisector of AA' is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through A' perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled B'. A line segment AB' is drawn, and a perpendicular bisector of AB' is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through B' perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled C'. A line segment AC' is drawn, and a perpendicular bisector of AC' is shown. The intersection of this perpendicular bisector and the line through C' perpendicular to the blue line is the center of the circle, labeled V.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021