

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 998. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados un triángulo ABC y un punto P , se consideran el punto F de intersección entre la recta AB y la recta paralela a AC pasando por P y el punto E de intersección entre la recta AC y la recta paralela a AB pasando por P :

- ① Probar que el lugar geométrico que describe el punto P cuando $AF \cdot AE = BC^2$ es la unión de dos hipérbolas disjuntas que comparten sus centros y sus asíntotas.
- ② Probar que una de estas hipérbolas corta (en cualquier caso) en dos puntos a la recta BC y representarla gráficamente, construyendo (al menos) cinco de sus puntos.
- ③ Dado un segmento BC , discutir, según la posición que ocupe el punto A , el número de puntos de intersección entre la recta BC y la otra hipérbola, representando gráficamente ésta en todos los casos posibles, construyendo (al menos) cinco de sus puntos.

Solución:

- ① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $P = (u : v : w)$ ($u + v + w > 0$), como:

$$\begin{cases} PF \equiv 0 = vx - (u + w)y + wz \\ PE \equiv 0 = wx + wy - (u + v)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = (u + w : v : 0) \\ E = (u + v : 0 : w) \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} AF^2 = \frac{c^2 v^2}{(u + v + w)^2} \\ AE^2 = \frac{b^2 w^2}{(u + v + w)^2} \end{cases}$$

por lo que, como:

$$AF \cdot AE = BC^2 \Leftrightarrow AF^2 AE^2 = a^4$$

entonces:

$$AF \cdot AE = BC^2 \Leftrightarrow 0 = \frac{[a^2 u^2 + a^2 v^2 + a^2 w^2 + 2a^2 uv + 2a^2 uw + (2a^2 - bc)vw][a^2 u^2 + a^2 v^2 + a^2 w^2 + 2a^2 uv + 2a^2 uw + (2a^2 + bc)vw]}{(u + v + w)^4}$$

lo cual significa que el punto P ha de estar situado sobre alguna de las dos cónicas cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 \equiv 0 = a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 z^2 + 2a^2 xy + 2a^2 xz + (2a^2 - bc)yz \\ \mathcal{C}_2 \equiv 0 = a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 z^2 + 2a^2 xy + 2a^2 xz + (2a^2 + bc)yz \end{cases}$$

Además:

☒ La cónica $\mathcal{C}_1$ es una hipérbola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 - bc \\ 2a^2 & 2a^2 - bc & 2a^2 \end{vmatrix} = -2a^2 b^2 c^2 \neq 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

y su discriminante es $\Delta_1 = \frac{b^2 c^2}{4} > 0$, estando las coordenadas de su centro (conjugado de la recta del infinito) y de sus puntos del infinito determinadas por las solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 - bc \\ 2a^2 & 2a^2 - bc & 2a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 - bc \\ 2a^2 & 2a^2 - bc & 2a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1 = (1 : 0 : 0) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 z^2 + 2a^2 xy + 2a^2 xz + (2a^2 - bc)yz \\ 0 = x + y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} I_{11} = (1 : -1 : 0) \\ I_{12} = (1 : 0 : -1) \end{cases}$$

por lo que sus asíntotas son las rectas AB y AC .

☐ La cónica C_2 es una hipérbola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 + bc \\ 2a^2 & 2a^2 + bc & 2a^2 \end{vmatrix} = -2a^2 b^2 c^2 \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta_2 = \frac{b^2 c^2}{4} > 0$, estando las coordenadas de su centro (conjugado de la recta del infinito) y de sus puntos del infinito determinadas por las solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 + bc \\ 2a^2 & 2a^2 + bc & 2a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 + bc \\ 2a^2 & 2a^2 + bc & 2a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1 = (1 : 0 : 0) = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 z^2 + 2a^2 xy + 2a^2 xz + (2a^2 + bc)yz \\ 0 = x + y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} I_{11} = (1 : -1 : 0) \\ I_{12} = (1 : 0 : -1) \end{cases}$$

por lo que sus asíntotas son las rectas AB y AC .

Finalmente, estas dos hipérbolas son disjuntas, ya que las únicas soluciones del sistema formado por las ecuaciones de ambas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 z^2 + 2a^2 xy + 2a^2 xz + (2a^2 - bc)yz \\ 0 = a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 z^2 + 2a^2 xy + 2a^2 xz + (2a^2 + bc)yz \end{array} \right\} \Rightarrow 2bcyz = 0 \Rightarrow yz = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} 0 = y \\ 0 = x + z \end{cases} \\ \text{ó} \\ \begin{cases} 0 = z \\ 0 = x + y \end{cases} \end{array} \right.$$

TRIÁNGULOS CABRI

corresponden a los puntos del infinito de sus asíntotas.

- ② La hipérbola $\mathbb{C}_2$ corta en dos puntos a la recta BC , cuyas coordenadas están determinadas por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + 2a^2xy + 2a^2xz + (2a^2 + bc)yz \\ 0 = x \end{cases} \Rightarrow a^2y^2 + a^2z^2 + (2a^2 + bc)yz = 0$$

ya que el discriminante de la ecuación cuadrática:

$$a^2t^2 + (2a^2 + bc)t + a^2 = 0$$

es $\Delta_2 = bc(bc + 4a^2) > 0$. Además:

- ☺ Esta hipérbola corta a la recta paralela a AC pasando por B , cuya ecuación es $x + z = 0$, únicamente (lo cual era de esperar, ya que esta recta es paralela a una de sus asíntotas) en el punto $T_{21} = (a^2 : bc : -a^2)$ (y, por tanto, esta hipérbola también pasa por el punto T'_{21} simétrico del punto T_{21} respecto de su centro A), de forma que:

$$BT_{21}^2 = \frac{a^4}{c^2} \Rightarrow BT_{21} = \frac{a^2}{c}$$

y estando el punto T_{21} situado en el semiplano definido por la recta AB que no contiene al punto C . Para construir esta distancia, con centro B , giramos el punto A hasta el punto A_B , hallamos la imagen A'_B del punto A_B por la inversión de centro B y radio a y, finalmente, con centro B , giramos el punto A'_B hasta el punto T_{21} .

- ☺ Esta hipérbola corta a la recta paralela a AB pasando por C , cuya ecuación es $x + y = 0$, únicamente (lo cual era de esperar, ya que esta recta es paralela a una de sus asíntotas) en el punto $T_{22} = (a^2 : -a^2 : bc)$ (y, por tanto, esta hipérbola también pasa por el punto T'_{22} simétrico del punto T_{22} respecto de su centro A), de forma que:

$$CT_{22}^2 = \frac{a^4}{b^2} \Rightarrow CT_{22} = \frac{a^2}{b}$$

y estando el punto T_{22} situado en el semiplano definido por la recta AC que no contiene al punto B . Para construir esta distancia, con centro C , giramos el punto A hasta el punto A_C , hallamos la imagen A'_C del punto A_C por la inversión de centro C y radio a y, finalmente, con centro C , giramos el punto A'_C hasta el punto T_{22} .

- ⊗ Esta hipérbola corta a la recta paralela a BC pasando por A , cuya ecuación es $y + z = 0$, en los puntos $U_2 = (\sqrt{bc} : -a : a)$ y $V_2 = (\sqrt{bc} : a : -a)$, simétricos uno del otro respecto de punto A y tales que:

$$U_2V_2^2 = \frac{4a^4}{bc} = \left(\frac{2a^2}{b}\right)\left(\frac{2a^2}{c}\right)$$

por lo que la distancia U_2V_2 es la media geométrica entre las distancias $2BA'_B$ y $2CA'_C$. Para construir esta distancia, haremos lo siguiente:

- ▲ Trasladamos paralelamente a la recta AB el punto A'_B y paralelamente a la recta AC el punto A'_C hasta cortar a la recta paralela a BC pasando por A en los puntos A''_B y A''_C , respectivamente.

TRIÁNGULOS CABRI

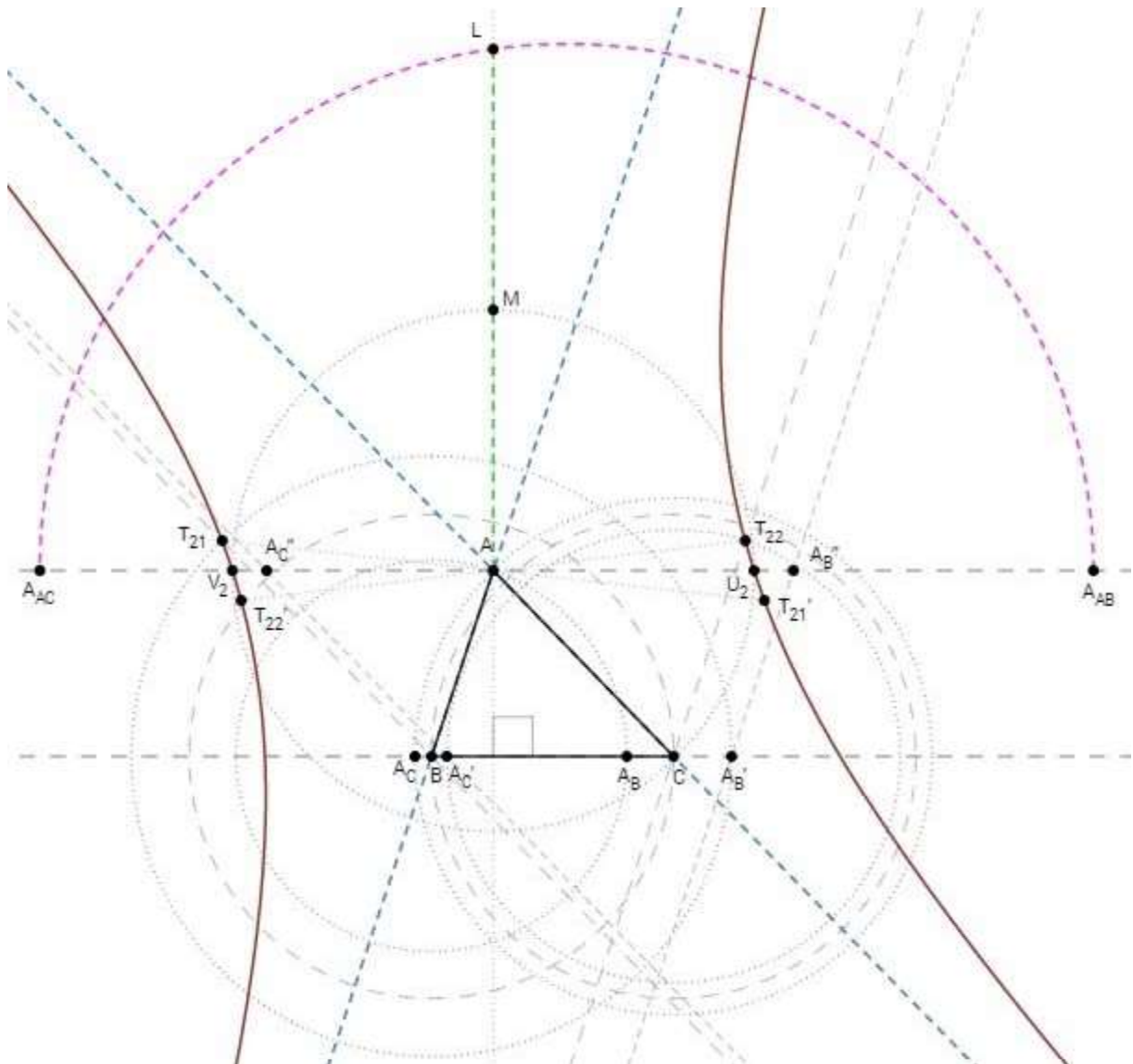
- ✦ Construimos los puntos simétricos A_{AB} y A_{AC} del punto A respecto de los puntos A_B'' y A_C'' , respectivamente.
- ★ Trazamos la semicircunferencia con diámetro $A_{AB}A_{AC}$ y la recta perpendicular a $A_{AB}A_{AC}$ pasando por el punto A , que corta a dicha semicircunferencia en el punto L . El Teorema de la Altura nos asegura que la longitud AL es la media geométrica entre las longitudes:

$$\begin{cases} AA_{AB} = 2AA_B'' = 2BA_B = \frac{2a^2}{c} \\ AA_{AC} = 2AA_C'' = 2CA_C = \frac{2a^2}{b} \end{cases}$$

por lo que, si M es el punto medio del segmento AL , resulta que:

$$AM = \frac{AL}{2} = \frac{U_2V_2}{2} = AU_2$$

y, por tanto, la circunferencia con centro A y radio AM corta a la recta paralela a BC pasando por A en los puntos U_2 y V_2 .



TRIÁNGULOS CABRI

- ③ Las coordenadas de los puntos de intersección entre la hipérbola $\mathbb{C}_1$ y la recta BC , están determinadas por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + 2a^2xy + 2a^2xz + (2a^2 - bc)yz \\ 0 = x \end{cases} \Rightarrow a^2y^2 + a^2z^2 + (2a^2 - bc)yz = 0$$

y como el discriminante de la ecuación cuadrática:

$$a^2t^2 + (2a^2 - bc)t + a^2 = 0$$

es $\Delta_1 = bc(bc - 4a^2)$, vamos a distinguir tres casos:

- ❶ Si $bc < 4a^2$, es decir, cuando el punto A está situado en el interior del óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos B y C y cuyo producto de distancias es igual a $(2BC)^2$, como $\Delta_1 < 0$, resulta que la hipérbola $\mathbb{C}_1$ no corta en ningún punto a la recta BC .
- ❷ Si $bc = 4a^2$, es decir, cuando el punto A está situado sobre el óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos B y C y cuyo producto de distancias es igual a $(2BC)^2$, como $\Delta_1 = 0$, resulta que la hipérbola $\mathbb{C}_1$ corta en único punto a la recta BC , por lo que es tangente a ella en dicho punto.
- ❸ Si $bc > 4a^2$, es decir, cuando el punto A está situado en el exterior del óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos B y C y cuyo producto de distancias es igual a $(2BC)^2$, como $\Delta_1 > 0$, resulta que la hipérbola $\mathbb{C}_1$ corta en dos puntos distintos a la recta BC .

Además:

- ☺ Esta hipérbola corta a la recta paralela a AC pasando por B , cuya ecuación es $x + z = 0$, únicamente (lo cual era de esperar, ya que esta recta es paralela a una de sus asíntotas) en el punto $T_{11} = (-a^2 : bc : a^2)$ (y, por tanto, esta hipérbola también pasa por el punto T'_{11} simétrico del punto T_{21} respecto de su centro A), de forma que:

$$BT_{11}^2 = \frac{a^4}{c^2} \Rightarrow BT_{11} = \frac{a^2}{c}$$

y estando el punto T_{11} situado en el semiplano definido por la recta BC que no contiene al punto A . Para construir esta distancia, con centro B , giramos el punto A hasta el punto A_B , hallamos la imagen A'_B del punto A_B por la inversión de centro B y radio a y, finalmente, con centro B , giramos el punto A'_B hasta el punto T_{11} .

- ☺ Esta hipérbola corta a la recta paralela a AB pasando por C , cuya ecuación es $x + y = 0$, únicamente (lo cual era de esperar, ya que esta recta es paralela a una de sus asíntotas) en el punto $T_{12} = (-a^2 : a^2 : bc)$ (y, por tanto, esta hipérbola también pasa por el punto T'_{12} simétrico del punto T_{12} respecto de su centro A), de forma que:

$$CT_{12}^2 = \frac{a^4}{b^2} \Rightarrow CT_{12} = \frac{a^2}{b}$$

y estando el punto T_{12} situado en el semiplano definido por la recta BC que no contiene al punto A . Para construir esta distancia, con centro C , giramos el punto A hasta el punto A_C , hallamos la imagen A'_C del punto A_C por la inversión de centro C y radio a y, finalmente, con centro C , giramos el punto A'_C hasta el punto T_{12} .

TRIÁNGULOS CABRI

- ⊗ Esta hipérbola corta a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC , cuya ecuación es $y - z = 0$, en los puntos $U_1 = (\sqrt{bc} + 2a : -a : -a)$ y $V_1 = (\sqrt{bc} - 2a : a : a)$, simétricos uno del otro respecto del punto A , siendo la recta tangente a la hipérbola en el punto U_1 :

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 - bc \\ 2a^2 & 2a^2 - bc & 2a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{bc} + 2a \\ -a \\ -a \end{pmatrix} = 2ax + (\sqrt{bc} + 2a)y + (\sqrt{bc} + 2a)z$$

paralela a la recta BC (lo cual era de esperar, ya que, como $\mathbb{C}_1(x, y, z) = \mathbb{C}_1(x, z, y)$, entonces, esta hipérbola es simétrica respecto de la mediana $y = z$) y tal que su punto de intersección con la recta AC es $Q = (\sqrt{bc} + 2a : 0 : -2a)$, siendo:

$$AQ^2 = \frac{4a^2b}{c} = 2b\left(\frac{2a^2}{c}\right)$$

por lo que la longitud AQ es la media geométrica de las longitudes $2AC$ y $2A'_B$ y el punto Q está situado sobre la prolongación del segmento CA a distancia AQ del punto A y, para construir este punto, haremos lo siguiente:

- ★ Hallamos el punto simétrico C' del punto C con respecto al punto A y el punto simétrico A' del punto A con respecto al punto C' , de forma que $AA' = 2b$.
- ★ Con centro en el punto B , giramos el punto A'_B hasta el punto A'_{BB} y hallamos el punto simétrico A'_{BBN} del punto A'_{BB} con respecto al punto medio N del segmento AB . A continuación, con centro en el punto A , giramos el punto A'_{BBN} hasta el punto A'_{BBNA} y hallamos el punto simétrico A'' del punto A con respecto al punto A'_{BBNA} , de forma que:

$$AA' = 2A'_B = \frac{2a^2}{c}$$

- ★ Trazamos la semicircunferencia con diámetro $A'A''$ y la recta perpendicular a AC pasando por A , cuyo punto de intersección es el punto L , por lo que el Teorema de la Altura nos asegura que:

$$AL^2 = AA' \cdot AA'' \left(\frac{2a^2}{c} \right) = AQ^2 \Rightarrow AL = AQ$$

- ★ Con centro en el punto A , giramos el punto L hasta el punto Q y, a continuación, trazamos la recta paralela a BC pasando por Q , que corta a la mediana correspondiente al vértice A en el punto U_1 .

Finalmente, cuando $bc = 4a^2$, se verifica que:

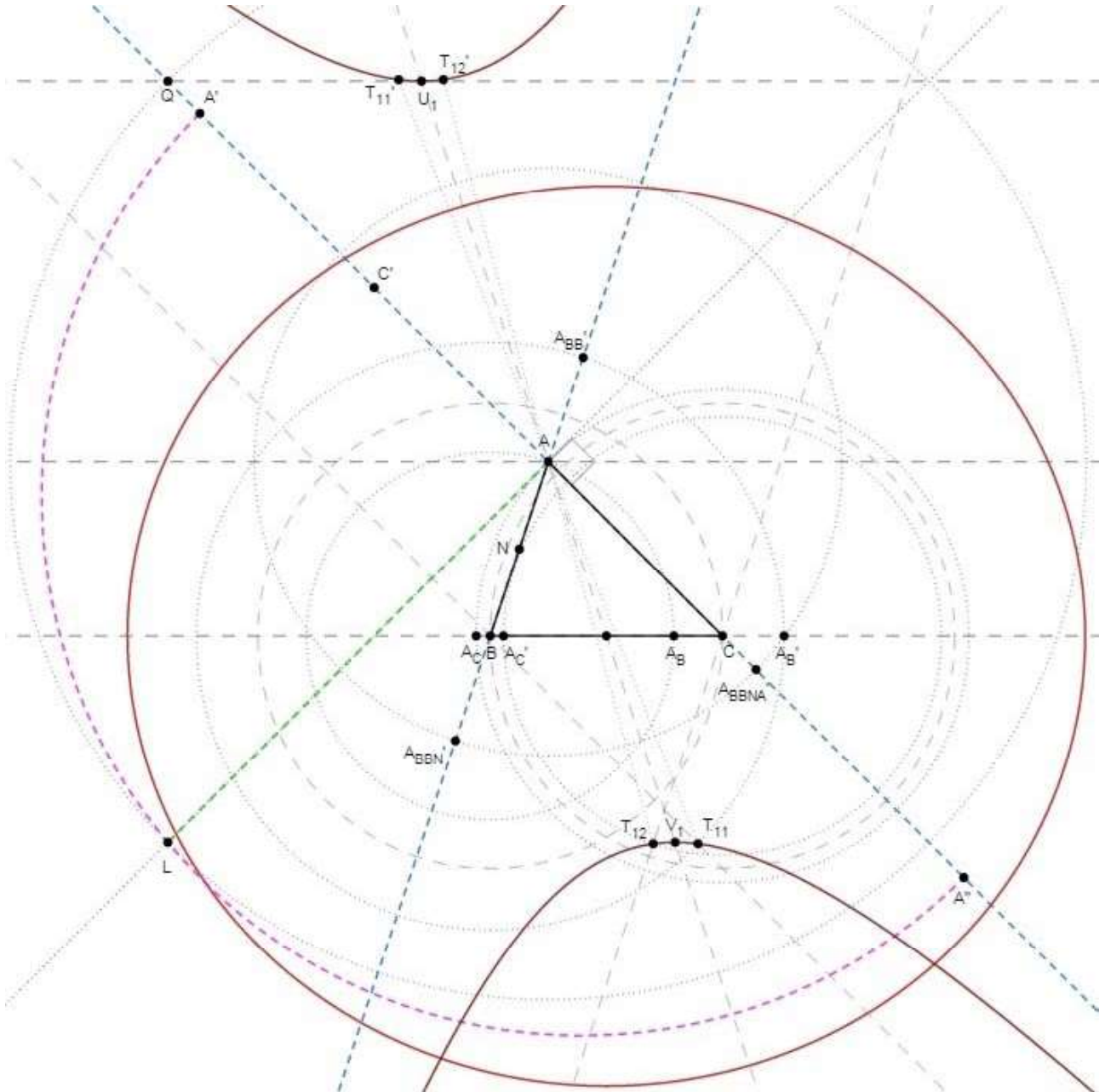
$$V_1 = (\sqrt{bc} - 2a : a : a) = (0 : a : a) = (0 : 1 : 1)$$

es decir, V_1 es el punto medio del segmento BC , por lo que podemos representar fácilmente el este punto sin necesidad de recurrir a todos los cálculos hechos anteriormente.

TRIÁNGULOS CABRI

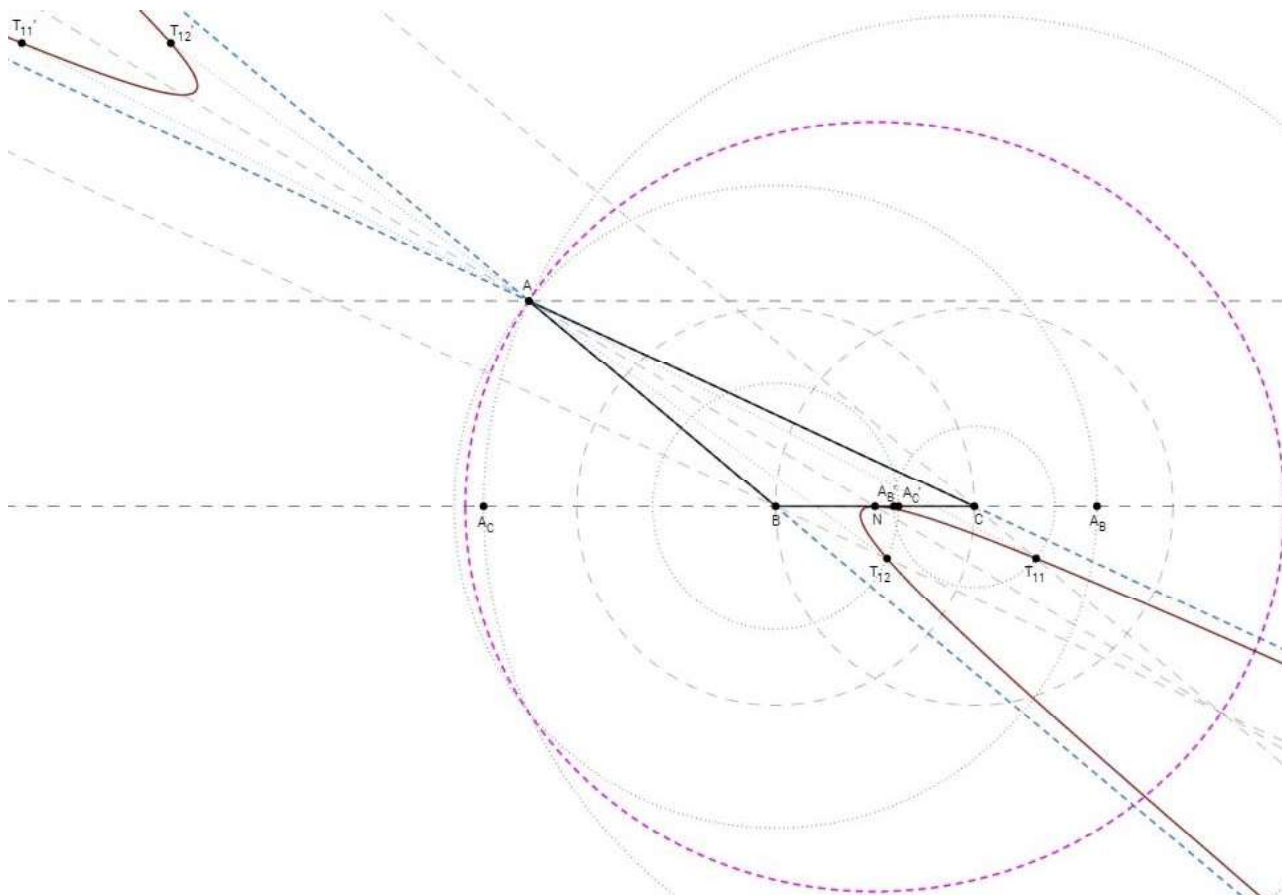
Vamos a representar gráficamente esta hipérbola en cada uno de los tres casos que hemos distinguido:

❶ $bc < 4a^2$:



TRIÁNGULOS CABRI

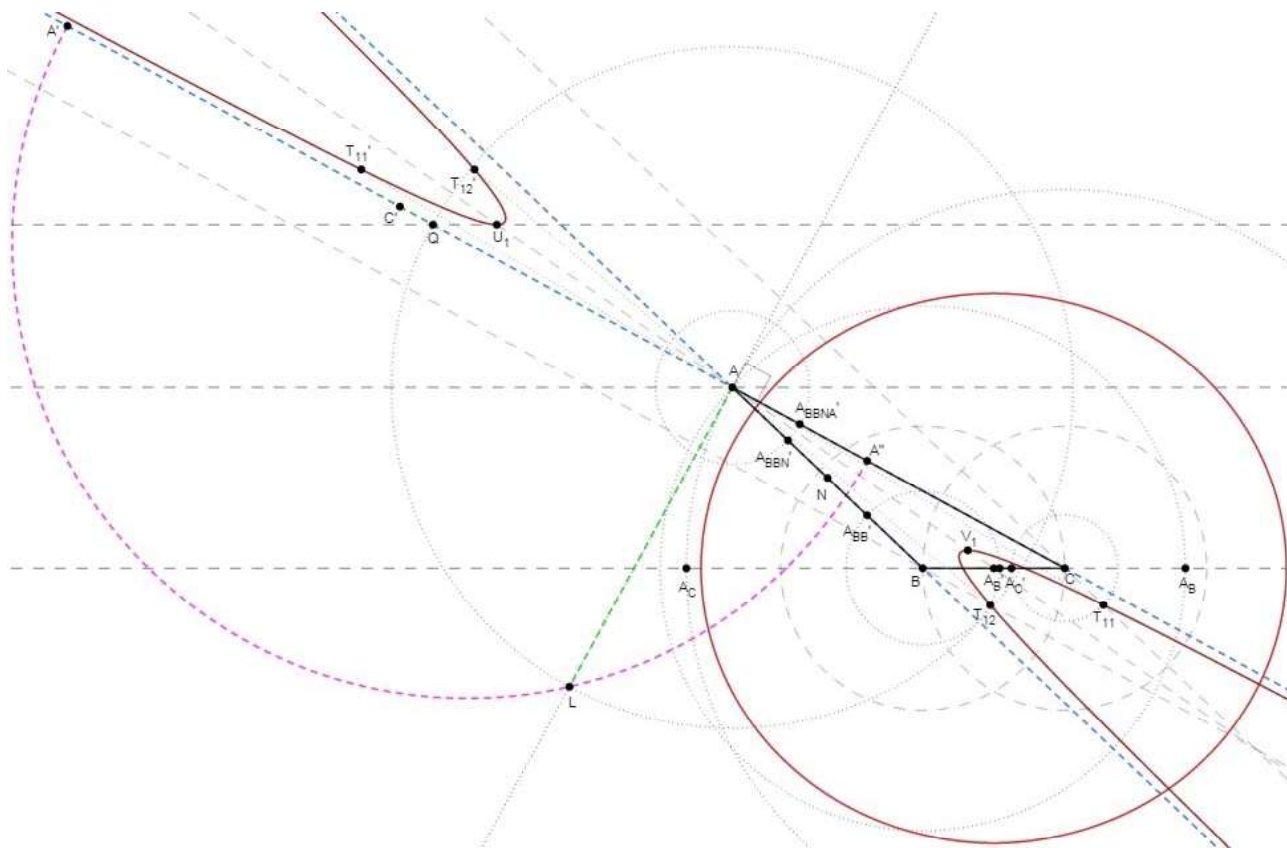
② $bc = 4a^2$:



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021

TRIÁNGULOS CABRI

③ $bc > 4a^2$:



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
16 de mayo de 2021 a 15 de junio de 2021