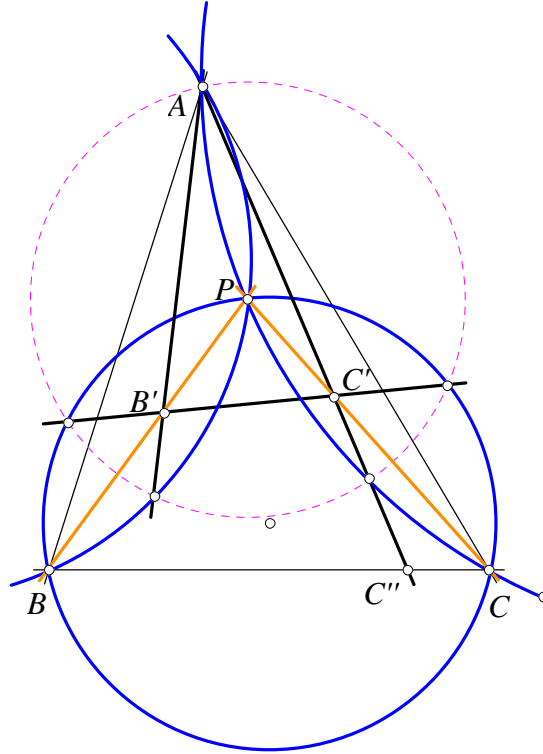


Problema 1008. *Dados un triángulo ABC y un punto P que no está situado sobre ninguno de sus lados ni sobre su circunferencia circunscrita, la inversión con centro P y radio PA transforma las circunferencias circunscritas a los triángulos BCP , CAP y ABP en las rectas P_a , P_b y P_c , respectivamente.*

1. *Probar que el triángulo $AW_{ac}W_{ab}$ determinado por estas tres rectas es perspectivo con el triángulo ABC , con centro de perspectividad P .*
2. *Si llamamos Q_b al punto de intersección entre las rectas P_b y BC , determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que el punto medio M del segmento BQ_b esté situado sobre la altura correspondiente al vértice A del triángulo ABC .*

Propuesto por Miguel Ángel Pérez García-Ortega.

Solución de Francisco Javier García Capitán. 1. Si B', C' son los inversos de B y C entonces los puntos P, B, B' están alineados, y también lo están P, C, C' , y además la recta $B'C'$ es la inversa de la circunferencia PBC .



2. Para resolver este apartado, recurrimos a las coordenadas baricéntricas. Si $P = (x : y : z)$, y AC' corta a BC en C'' tenemos las coordenadas

$$C' = (x(b^2x + a^2y - c^2y - b^2z), y(b^2x + a^2y - c^2y - b^2z), c^2y^2 + b^2xz + b^2yz),$$

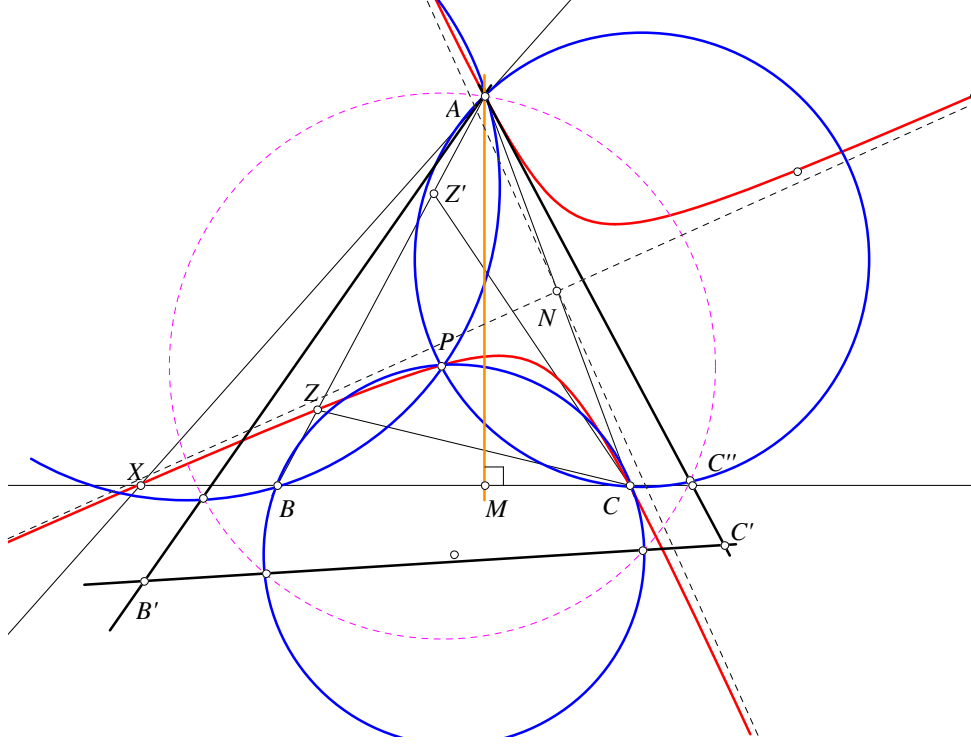
$$C'' = (0, y(b^2x + a^2y - c^2y - b^2z), c^2y^2 + b^2xz + b^2yz)$$

$$M = (0, 2b^2xy + 2a^2y^2 - c^2y^2 + b^2xz - b^2yz, c^2y^2 + b^2xz + b^2yz)$$

El punto M resulta estar sobre la altura trazada por A si y solo si

$$b^2(a^2yz + (b^2 - c^2)zx - (a^2 - b^2 + c^2)xy) - (a^4 - a^2b^2)y^2 = 0,$$

ecuación de una hipérbola equilátera que pasa por C y A con centro en el punto medio del lado CA .



Para construir la hipérbola puede usarse la siguiente información:

- Si X es el segundo punto de intersección de la hipérbola y el lado BC , se cumple que $\angle AXB = \angle A$.
- Si Z es el segundo punto de intersección de la hipérbola y el lado AB y Z' es el punto sobre AB tal que las líneas CZ y CZ' son isogonales, entonces $\angle BZ'B = \angle B$.
- Los puntos del infinito de la hipérbola son

$$J_1 = (-a^2 : b(b+c) : a^2 - b^2 - bc), J_2 = (-a^2 : b(b-c) : a^2 - b^2 + bc).$$

J_1 es el punto del infinito de la recta que une el vértice C con el punto de intersección (sobre la circunferencia circunscrita) de la mediatriz de BC y la bisectriz interior del ángulo A .