

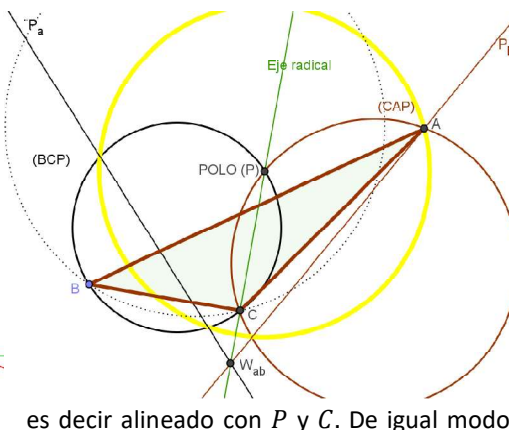
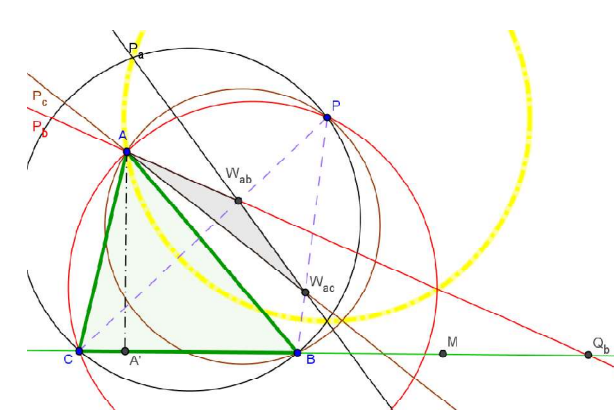
**Problema 1008.-** Dados un triángulo  $ABC$  y un punto  $P$  que no está situado sobre ninguno de sus lados ni sobre su circunferencia circunscrita, la inversión con centro  $P$  y radio  $PA$  transforma las circunferencias circunscritas a los triángulos  $BCP$ ,  $CAP$  y  $ABP$  en las rectas  $P_a$ ,  $P_b$  y  $P_c$ , respectivamente.

**1)** Probar que el triángulo  $AW_{ac}W_{ab}$  determinado por estas tres rectas es perspectivo con el triángulo  $ABC$ , con centro de perspectividad  $P$ .

**2)** Si llamamos  $Q_b$  al punto de intersección entre las rectas  $P_b$  y  $BC$ , determinar el lugar geométrico que debe describir el punto  $P$  para que el punto medio  $M$  del segmento  $BQ_b$  esté situado sobre la altura correspondiente al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ .

Pérez M. A. (2021): Comunicación personal.

**Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.**



**1)** Las circunferencias que pasan por el punto  $P$  se transforman en el eje radical con la circunferencia de inversión. Por tanto,  $W_{ab}$  está en el centro radical de las circunferencias  $(P; PA)$ ,  $(CAP)$  y  $(BCP)$ ; y en consecuencia, en el eje radical de las dos últimas, es decir alineado con  $P$  y  $C$ . De igual modo  $W_{ac}$  está alineado con  $P$

y  $B$ .

**2)** Tomo  $A(0,0)$ ;  $B(p,q)$ ;  $C(2,0)$ ;  $P(u,v)$ . Con esto voy a poner las ecuaciones de los diferentes objetos geométricos:

Circunferencia  $Cir(P; AP)$ :  $x^2 + y^2 - 2(ux + vy) = 0$ .

Circunferencia  $Cir(A, C, P)$ :  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , e imponiendo las condiciones de pasar por los tres puntos se obtiene finalmente la ecuación  $v(x^2 + y^2) - 2vx - (u^2 - 2u + v^2)y = 0$ .

La recta  $P_b$  es el eje radical de estas dos circunferencias, es decir, es la recta cuya ecuación es la diferencia entre estas las de estas dos últimas:  $2(u - 1)vx + (v^2 + 2u - u^2)y = 0$ .

Ahora la ecuación de la recta  $BC$ :  $qx + y(2 - p) - 2q = 0$ . La altura desde  $A$  es perpendicular a esta recta, su ecuación por tanto es:  $(p - 2)x + qy = 0$ .

De la intersección de ambas se obtiene el pie de la altura que es el punto de coordenadas:

$$x = \frac{2q^2}{(p-2)^2 + q^2}, y = \frac{-2q(p-2)}{(p-2)^2 + q^2},$$

si  $p = 2$ , es un triángulo rectángulo en  $C$  y éste es el pie de la altura, como se ve fácilmente al sustituir  $p = 2$ , pero si  $p = 0$ , es rectángulo en  $A$ , la altura desde  $A$  es la altura sobre la hipotenusa y el pie es el punto  $M = \left(2 - \frac{8}{q^2+4}, \frac{4q}{q^2+4}\right)$

Si llamo  $A'$  al pie de la altura desde  $A$ , tengo que conseguir que sea el punto medio de  $BQ_b$ , por tanto se ha de verificar  $B + Q_b = 2A'$ , por tanto  $Q_b = 2A' - B$ , esto significa que  $2A' - B$  ha de ser un punto de la recta  $P_b$ . Vamos a calcular

$$2A' - B = 2\left(\frac{2q^2}{(p-2)^2 + q^2}, \frac{-2q(p-2)}{(p-2)^2 + q^2}\right) - (p, q) = \left(\frac{4 \cdot q^2 - p((p-2)^2 + q^2)}{(p-2)^2 + q^2}, \frac{-q(p^2 + q^2 - 4)}{(p-2)^2 + q^2}\right)$$

y ahora sustituyendo en  $P_b$  tenemos

$$2(u-1)v \frac{4q^2 - p((p-2)^2 + q^2)}{(p-2)^2 + q^2} + (v^2 + 2u - u^2) \frac{-q(p^2 + q^2 - 4)}{(p-2)^2 + q^2} = 0.$$

Suprimiendo los denominadores y sustituyendo  $u$  y  $v$  por  $x$  y  $y$  tendremos la ecuación del lugar geométrico buscado:

$$2y(4q^2 - p((p-2)^2 + q^2))(x-1) - (q(p^2 + q^2 - 4))(y^2 + 2x - x^2) = 0$$

Suprimiendo los términos de grado inferior a 2 obtenemos la ecuación de los puntos del infinito de esta cónica:  $2xy(4q^2 - p((p-2)^2 + q^2) - (q(p^2 + q^2 - 4))(y^2 - x^2)) = 0$  cuyo discriminante es

$$\left(4q^2 - p((p-2)^2 + q^2)\right)^2 + q^2(p^2 + q^2 - 4)^2 = (p^2 + q^2)((p-2)^2 + q^2)^2 > 0$$

Por tanto TODAS las cónicas resultantes son hipérbolas. Como el producto de las soluciones de esa ecuación es -1, deducimos que las asíntotas son perpendiculares, o sea, se trata de **hipérbolas equiláteras**.

No resulta difícil comprobar que el centro de todas estas cónicas es el punto  $Z(0,1)$ , punto medio del lado  $AC$ .

Observa cómo los puntos  $A$  y  $C$  verifican la ecuación de esas hipérbolas y por tanto, son puntos del lugar.

Para  $p = 3/2$  y  $q = 1$  se obtiene la hipérbola  $3x^2 - 17xy - 6x - 3y^2 + 17y = 0$ . ■

