TRIÁNGULOS CABRI
SEPTIEMBRE 2021

<u>Problema 1010.</u> (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados un triángulo no isósceles ABC con baricentro G y punto simediano K y un punto P que no está situado sobre ninguno de sus tres vértices, se considera el conjugado isotómico $P^{\bullet}$ del punto P. Determinar el lugar geométrico que describe el punto P cuando los puntos $P^{\bullet}$, G y K están alineados.

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P=(u:v:w)\ (u+v+w>0)$, como:

$$\begin{cases} G=(1:1:1) \\ K=(a^2:b^2:c^2) \\ P^{\bullet}=(vw:uw:uv) \end{cases}$$

imponiendo que estos tres puntos estén alineados, obtenemos que:

$$0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}=(b^2-a^2)uv+(a^2-c^2)uw+(c^2-b^2)vw$$

lo cual significa que el punto P ha de estar situado sobre la cónica de ecuación:

$$(b^2-a^2)xy+(a^2-c^2)xz+(c^2-b^2)yz=0$$

que es una hipérbola que pasa por los puntos A, B y C y tiene centro en el punto:

$$X_{115}=((b^2-c^2)^2:(c^2-a^2)^2:(a^2-b^2)^2)$$

ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & b^2-a^2 & a^2-c^2 \\ b^2-a^2 & 0 & c^2-b^2 \\ a^2-c^2 & c^2-b^2 & 0 \end{vmatrix}=2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$$

y tiene discriminante:

$$\Delta=\frac{(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2}{2}>0$$

Además:

① Como el punto $G^{\bullet}=G$ está alineado con los puntos G e K, entonces, esta hipérbola debe pasar por el punto G.

② Como el punto $H^{\bullet}=(-a^2+b^2+c^2:a^2-b^2+c^2:a^2+b^2-c^2)$ conjugado isotómico del ortocentro H del triángulo ABC verifica que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ -a^2+b^2+c^2 & a^2-b^2+c^2 & a^2+b^2-c^2 \end{vmatrix}=0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

entonces, los puntos $H^{\bullet}$, G y K están alineados, por lo que esta hipérbola ha de pasar por el ortocentro H del triángulo ABC, lo cual significa que esta hipérbola es equilátera.

③ La recta:

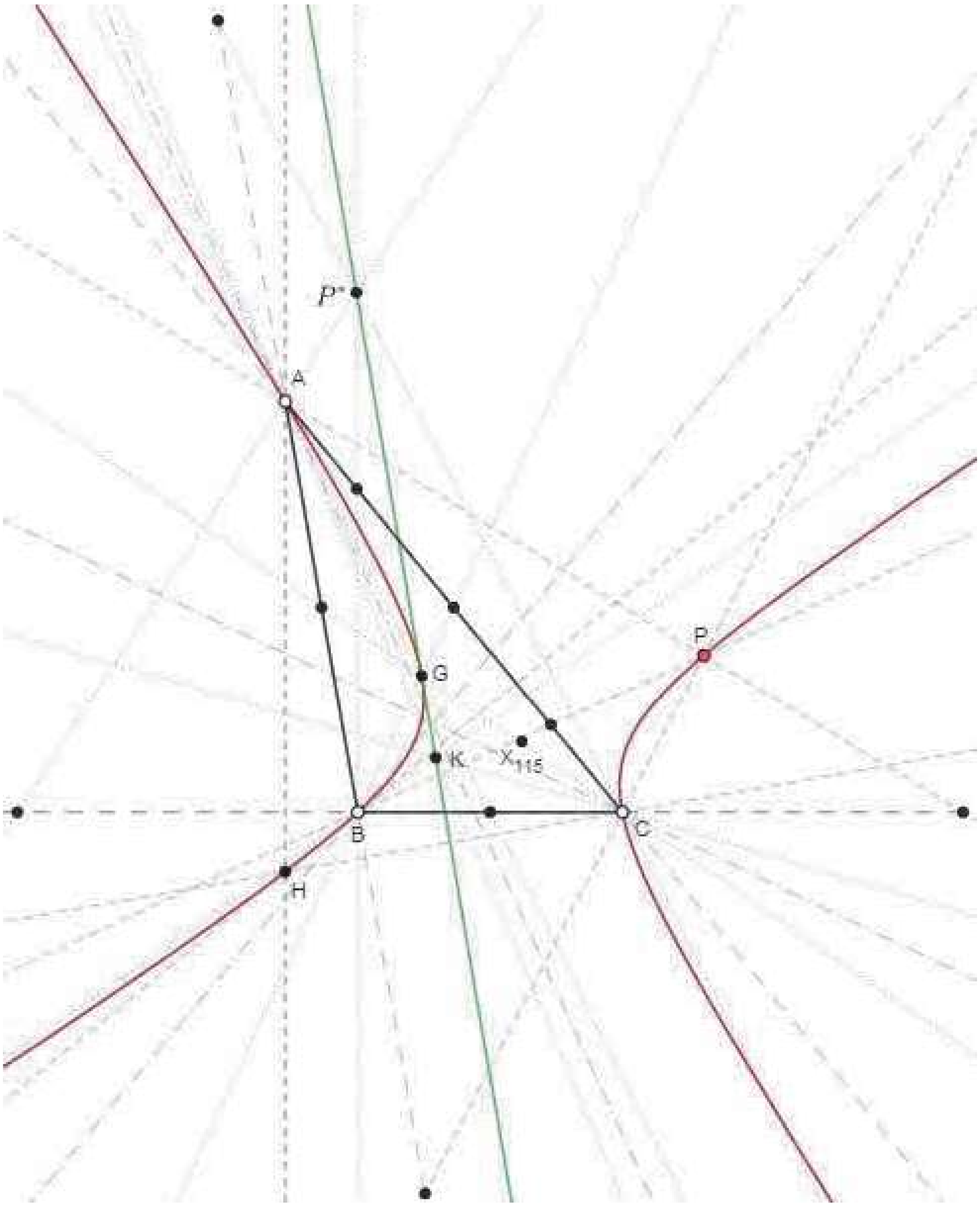
$$GK \equiv (b^2 - c^2)x + (c^2 - a^2)y + (a^2 - b^2)z = 0$$

es tangente a esta hipérbola en el punto G, ya que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = (b^2 - c^2)x + (c^2 - a^2)y + (a^2 - b^2)z \\ 0 = (b^2 - a^2)xy + (a^2 - c^2)xz + (c^2 - b^2)yz \end{cases}$$

tiene solución única.

④ Debemos excluir de esta hipérbola (llamada hipérbola de Kiepert del triángulo ABC) a los puntos A, B y C, ya que, para ellos, no está definido el conjugado isotómico.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega