Edición del 1 de Septiembre al 30 de Septiembre de 2021 (adelantada al 24 de Agosto)

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz)

***Problema* 1010.**

Dados un triángulo no isósceles ABC con baricentro G, y simediano K y un punto P que no está situado sobre ninguno de sus tres vértices, se considera el conjugado isotómico P^* del punto P. Determinar el lugar geométrico que describe el punto P cuando los puntos P^*, G y K están alineados.

Pérez M. A. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

El conjugado isotómico de un punto P es aquél cuyas coordenadas baricéntricas son las inversas de las de P. Si tenemos una recta que pasa por el baricentro G y por otro punto $Q(p:q:r)$, la recta que pasa por ellos es la de ecuación $(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0$

para que el conjugado isotómico de $P(u:v:w)$ esté en esa recta se debe verificar

$$\frac{q-r}{u}+\frac{r-p}{v}+\frac{p-q}{w}=0$$

que al variar u,v,w describe una cónica circunscrita al triángulo; los puntos del infinito son aquellos tales que $u+v+w=0$, o sea, las soluciones de la ecuación:

$$\frac{q-r}{u}+\frac{r-p}{v}=\frac{p-q}{w}$$

que equivale a $[(q-r)v+(r-p)u](u+v)-(p-q)uv=0$ o bien

$$u^2(p-r)+2uv(p-q)+v^2(r-q)=0$$

El discriminante de esta ecuación es

$$(p-q)^2-(p-r)(r-q)= p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp =$$

$$\frac{1}{2}\left[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\right] > 0$$

Se trata, por tanto, de una hipérbola. Su ecuación ordenada, sustituyendo u,v,w por x,y,z es:

$$xy(p-q)+yz(q-r)+zx(r-p)=0$$

Si el punto Q es el simediano tenemos la hipérbola $xy(a^2-b^2)+yz(b^2-c^2)+zx(c^2-a^2)=0.$■