Pr. Cabri 1011

Enunciado

Dado un triángulo ABC, se considera el segundo punto T de intersección entre su circunelipse de Steiner y la mediana correspondiente al vértice A. Determinar y representar gráficamente el lugar geométrico que describe un punto P tal que su conjugado isotómico P* está situado sobre la recta tangente a la circunelipse de Steiner del triángulo ABC en el punto T.

Propuesto por Miguel Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Se trata de obtener la transformada isotómica de dicha recta, paralela al lado BC por T.
Como la circunelipse de Steiner es homotética con la inelipse, con razón 2 y centro en G, el punto T es el simétrico de G rspecto a M, siendo M el punto medio de BC.
Como las transformaciones afines conservan las medianas, los puntos medios y la razón entre segmentos, conserva también el transformado isotómico. Precisando más, P* es el transformado isotómico de un punto P y Tf es una afinidad, entonces Tf(P*) es el transformado isotómico de Tf(P).
Así pues nos basta con considerar un triángulo concreto, por ejemplo, de vértices A(0,1), B(0,0) y C(1,0).
Su baricentro es $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $T(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$ y $r(t)=(t, -\frac{1}{3})$ la recta por T paralela a BC.
El transformado isotómico de r(t) es $k(t)=(\frac{4-3t}{(2-3t)^2}, 1-\frac{4}{(2-3t)^2})$ de donde, eliminando t, obtenemos su ecuación implícita
$4x^2 + x(-4+4y) - (1-y)y = 0$.
Ésta es una parábola (su invariante afín es 0) que pasa por A, B, C y es tangente a la paralela a BC por A, como es fácil comprobar.

Out[318]=