

TRIÁNGULOS CABRI

OCTUBRE 2021

Problema 1013. (propuesto por César Beade Franco)

- ① Demostrar que la transformada isotómica de cualquier recta con respecto a un triángulo ABC es una cónica.
- ② Estudiar el tipo de cónica si la recta es paralela al lado BC . Comprobar que, en este caso, el centro de la cónica está situado sobre la mediana m_a correspondiente al vértice A . ¿Cuándo esta cónica es una parábola?

(Triángulos Cabri nº 1013)

Solución:

- ① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si:

$$px + qy + tz = 0$$

(con p , q y t no todos nulos) es la ecuación de una recta cualquiera y el punto $P = (u : v : w)$ está situado sobre ella, resulta que:

$$pu + qv + tw = 0$$

$$pu^2vw + quv^2w + tuv^2w = 0$$

$$p(uw)(uv) + q(vw)(uv) + t(vw)(uw) = 0$$

por lo que el punto $P^* = (vw : uw : uv)$ conjugado isotómico del punto P está situado sobre la cónica circunscrita al triángulo ABC cuya ecuación es:

$$pyz + qxz + txy = 0$$

Recíprocamente, si:

$$pyz + qxz + txy = 0$$

(con p , q y t no todos nulos) es la ecuación de una cónica cualquiera circunscrita al triángulo ABC y el punto $P = (u : v : w)$ está situado sobre ella, resulta que:

$$pvw + quw + tuv = 0$$

por lo que el punto $P^* = (vw : uw : uv)$ conjugado isotómico del punto P está situado sobre la recta cuya ecuación es:

$$px + qy + tz = 0$$

Por tanto, la transformada isotómica de cualquier recta con respecto al triángulo ABC es una cónica circunscrita a dicho triángulo.

TRIÁNGULOS CABRI

OCTUBRE 2021

- ② Si la recta de ecuación $px + qy + tz = 0$ es paralela a BC , entonces:

$$(q - t : t - p : p - q) = (0 : 1 : -1) \Rightarrow t = q$$

por lo que la ecuación de su circuncónica transformada es:

$$qxy + qxz + pyz = 0 \quad (p \neq 0 \text{ ó } q \neq 0)$$

estando las coordenadas de su centro (conjugado de la recta del infinito) determinadas por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q & q \\ q & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -qx + qy + (q-p)z \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q & q \\ q & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -qx + (q-p)y + qz \end{cases} \Rightarrow Q = (2q - p : q : q)$$

y, por tanto, dicho centro está situado sobre la mediana correspondiente al vértice A , cuya ecuación es $y - z = 0$. Además, si $q \neq 0$, la recta polar del punto A respecto de esta cónica:

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q & q \\ q & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = q(y + z) \Rightarrow y + z = 0$$

es la recta paralela a BC pasando por el punto A (lo cual significa que cualquier cónica no degenerada de este conjunto de cónicas es tangente a dicha recta en el punto A) y, como su discriminante es $\Delta = \frac{p(p-4q)}{4}$ y el determinante de su matriz asociada es $\theta = 2pq^2$, vamos a distinguir tres casos:

- ❶ Si $p = 0$ y $q \neq 0$, entonces, la recta considerada es la recta paralela a BC pasando por el punto A , cuya ecuación es $y + z = 0$, siendo la cónica correspondiente un par de rectas paralelas, cuya ecuación es:

$$x(y + z) = 0$$

y está formado por la recta paralela a BC pasando por el punto A y la recta BC .

- ❷ Si $p \neq 0$ y $q = 0$, entonces, la recta considerada es la recta BC , cuya ecuación es $x = 0$, siendo la cónica correspondiente un par de rectas secantes, cuya ecuación es:

$$yz = 0$$

y está formado por las rectas AB y AC .

TRIÁNGULOS CABRI

OCTUBRE 2021

- ③ Si $p \neq 0 \neq q$, entonces, la recta considerada corta a la recta AB en el punto $T = (-q : p : 0)$, siendo la cónica correspondiente no degenerada y tenemos que distinguir dos casos:

✉ Si $p = 4q$, entonces, la recta considerada, cuya ecuación es:

$$4x + y + z = 0$$

corta a la recta AB en el punto $T = (-1 : 4 : 0) = M$ situado sobre la prolongación del segmento AB y tal que $AB : BM = 3 : 1$, siendo la cónica correspondiente una parábola (ya que $\Delta = 0$), cuyo eje es paralelo a la mediana correspondiente al vértice A (ya que, según hemos probado anteriormente, su centro está situado sobre esta recta) y cuya ecuación es:

$$xy + xz + 4yz = 0$$

Además:

- ⌚ Como las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola en los puntos B y C son:

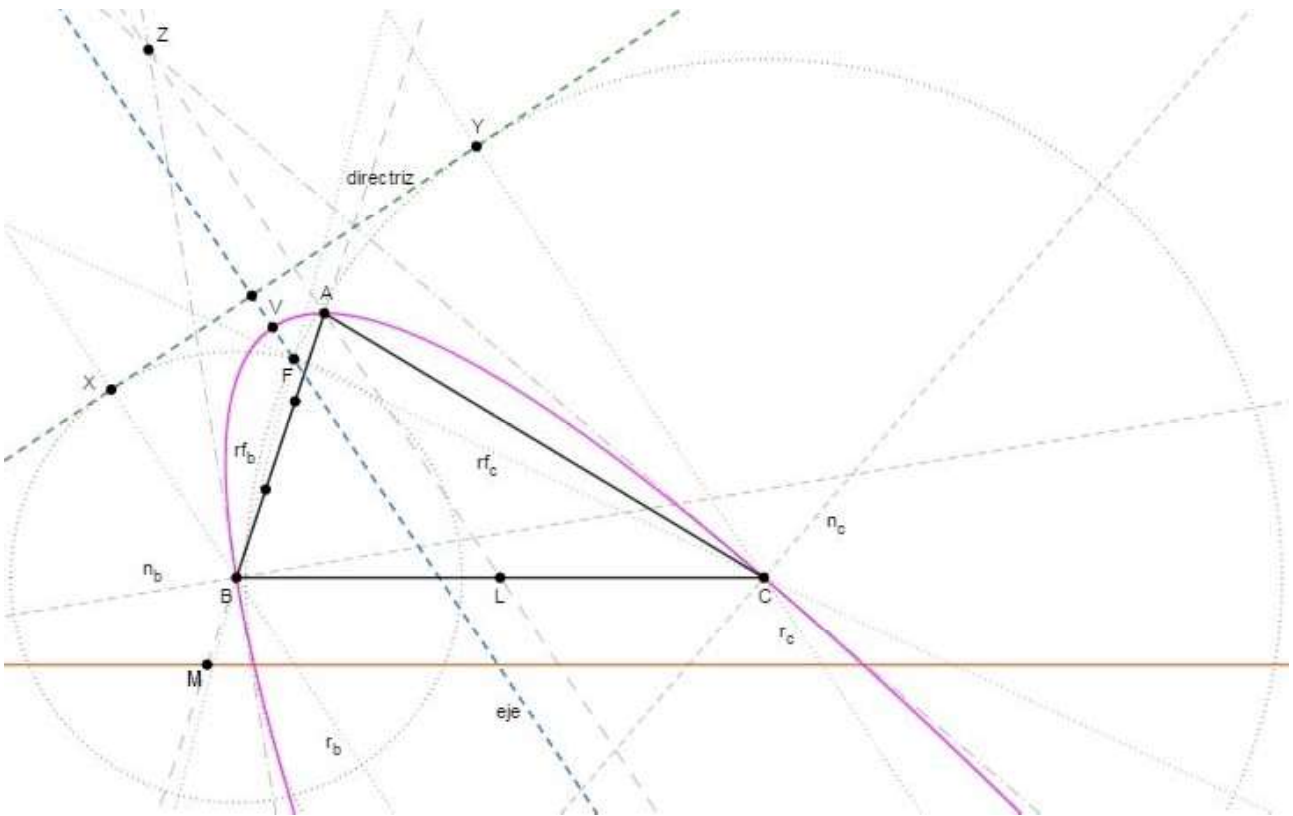
$$\left\{ \begin{array}{l} t_b \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = x + 4z \\ t_c \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = x + 4y \end{array} \right.$$

entonces, ambas rectas tangentes se cortan en el punto $Z = (4 : -1 : -1)$ simétrico del punto medio $L = (0 : 1 : 1)$ del segmento BC con respecto al punto A , por lo que podemos representar gráficamente dichas rectas tangentes y sus respectivas rectas perpendiculares n_b y n_c en los puntos B y C .

- ⌚ Si r_b y r_c son los rayos paralelos al eje de la parábola (es decir, paralelos a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC) que inciden en ella en los puntos B y C , respectivamente, la reflexión rf_b de r_b sobre la recta n_b normal a la parábola en el punto B y la reflexión rf_c de r_c sobre la recta n_c normal a la parábola en el punto C se cortan en el foco F de la parábola, siendo el eje de ésta la recta paralela a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC pasando por el punto F .
- ⌚ Como cualquier punto de la parábola equidista de su foco y de su directriz y las circunferencias (B, BF) y (C, CF) cortan a los rayos r_b y r_c en los puntos X e Y , respectivamente, resulta que la directriz es la recta XY .
- ⌚ Finalmente, una vez construidos el foco y la directriz de la parábola, podemos construir ésta.

TRIÁNGULOS CABRI

OCTUBRE 2021



☐ Si $p \neq 4q$, puede ocurrir que:

- ▲ El punto $(q : -p : 0)$ de intersección entre la recta considerada y la recta AB esté situado sobre la prolongación del segmento orientado BA , en cuyo caso $p, q > 0$ y $q - p > 0$, por lo que:

$$4q - p > q - p > 0 \Rightarrow p - 4q < 0$$

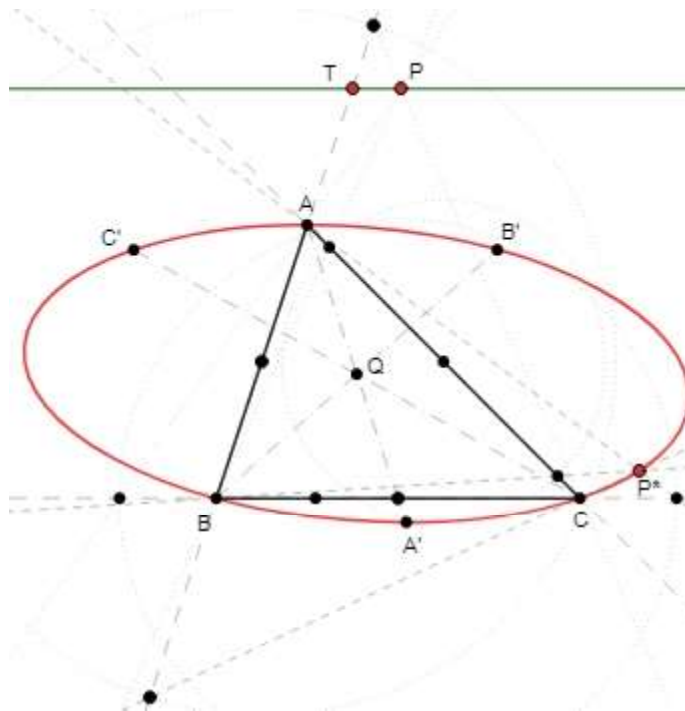
luego:

$$\Delta = \frac{p(p-4q)}{4} < 0$$

y, por tanto, la cónica correspondiente es una elipse.

TRIÁNGULOS CABRI

OCTUBRE 2021



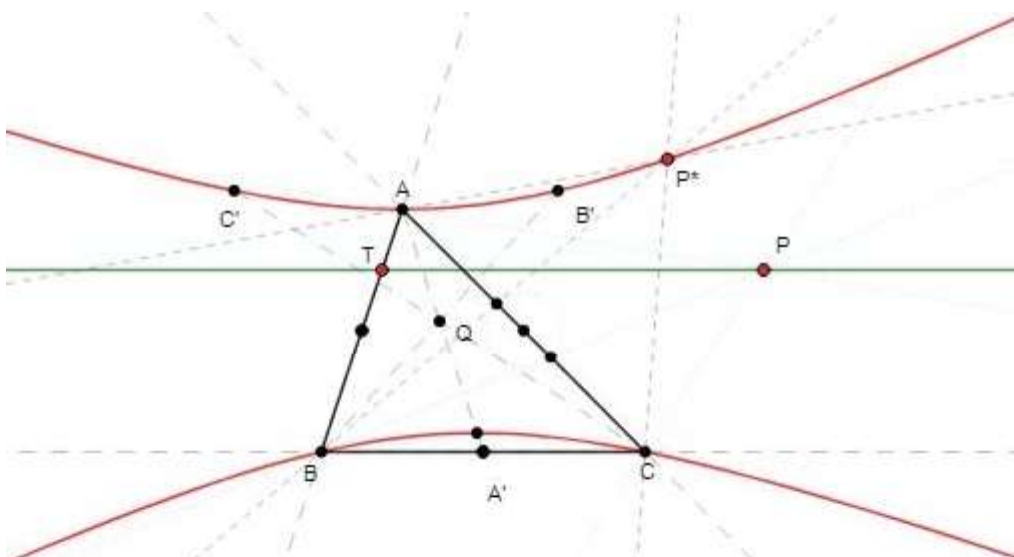
- ✦ El punto $(q : -p : 0)$ de intersección entre la recta considerada y la recta AB esté situado en el interior del segmento BA , en cuyo caso $p < 0$ y $q > 0$, por lo que:

$$pq < 0$$

luego:

$$\Delta = \frac{p(p-4q)}{4} = \frac{p^2-4pq}{4} > 0$$

y, por tanto, la cónica correspondiente es una hipérbola.



TRIÁNGULOS CABRI

OCTUBRE 2021

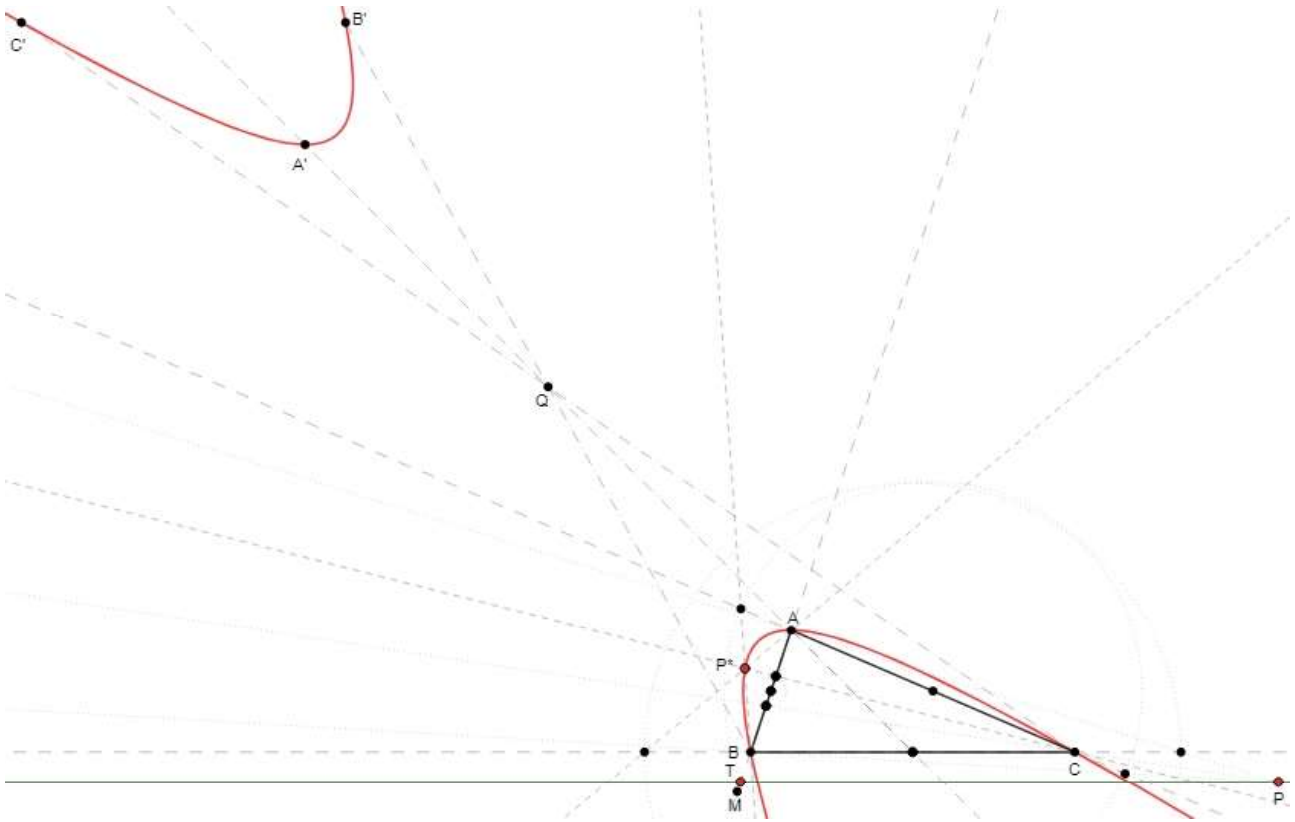
- ★ El punto $T = (-q : p : 0) = \left(-1 : \frac{p}{q} : 0\right)$ de intersección entre la recta considerada y la recta AB esté situado en el interior el segmento BM , en cuyo caso $p > 0$ y:

$$\frac{p}{q} - 1 = \frac{AB}{BT} > 3 \Rightarrow p > 4q$$

luego:

$$\Delta = \frac{p(p-4q)}{4} > 0$$

y, por tanto, la cónica correspondiente es una hipérbola.



- ★ El punto $T = (-q : p : 0) = \left(-1 : \frac{p}{q} : 0\right)$ de intersección entre la recta considerada y la recta AB esté situado sobre la prolongación del segmento orientado BM , en cuyo caso $p > 0$ y:

$$\frac{p}{q} - 1 = \frac{AB}{BT} < 3 \Rightarrow p < 4q$$

luego:

$$\Delta = \frac{p(p-4q)}{4} < 0$$

y, por tanto, la cónica correspondiente es una elipse.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

OCTUBRE 2021

