

Edición del 1 de Septiembre al 31 de Octubre de 2021

Propuesto por César Beade Franco, profesor de matemáticas jubilado de Cee (La Coruña)

Problema 1013.- a) Demostrar que la transformada isotómica de cualquier recta respecto a un triángulo ABC es una cónica.

b) Estudiar el tipo de cónica si la recta es paralela al lado BC (o a otro cualquiera). Comprobar que en este caso los centros de esta cónica están sobre la mediana m_a .

c) ¿Cuándo la cónica del apartado b) es una parábola?

Beade, C. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

a) El conjugado isotómico de un punto P es aquél cuyas coordenadas baricéntricas son las inversas de las de P . La transformada isotómica de la recta de ecuación $mx + ny + pz = 0$ es la curva de ecuación

$$\frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = 0$$

o bien, suprimiendo los denominadores, $myz + nzx + pxy = 0$ que es una cónica circunscrita al triángulo de referencia ABC .

b) Si la recta es paralela a BC ha de pasar por el punto $(0: -1: 1)$ que es el punto del infinito de esta recta, por tanto su ecuación es de la forma $mx + ny + nz = 0$.

La cónica correspondiente tiene por ecuación $myz + nzx + nxy = 0$ de matriz $\begin{pmatrix} 0 & n & n \\ n & 0 & m \\ n & m & 0 \end{pmatrix}$ y centro el punto $Z(2n - m: n: n)$ que evidentemente está situado sobre la mediana m_a de ecuación $y = z$.

c) Para que sea una parábola la ecuación de los puntos del infinito ha de tener sólo una solución esto es, poniendo en la ecuación de la cónica $z = -x - y$ se obtiene $nx^2 + mxy + my^2 = 0$ cuyo discriminante es $m^2 - 4mn = m(m - 4n)$.

Este discriminante se anula cuando $m = 0$, en cuyo caso la cónica degenera en un par de rectas: $x = 0$ e $y + z = 0$. Pero si $m = 4n$, la recta es $4x + y + z = 0$ y se obtiene la cónica $xy + xz + 4yz = 0$ que es una parábola, cuyo centro es el punto del infinito $(-2: 1: 1)$ que es también el punto del infinito de la mediana m_a .

Esta parábola es la misma que la del problema 1011 de esta revista del pasado septiembre. ■