

Pr. Cabri I014

Enunciado

- a) Caracterizar las curvas que son transformadas isotómicas de cualquier recta que pasa por el baricentro G de un triángulo ABC.
- b) Calcular el lugar geométrico de los centros de las curvas del apartado a)

Propuesto por César Beade Franco.

Solución

de César Beade Franco

- a) Se trata de obtener la transformada isotómica de cualquier recta que pase por el baricentro.

Como las transformaciones afines conservan las medianas, los puntos medios y la razón entre segmentos, conserva también el transformado isotómico. Precisando más, P^* es el transformado isotómico de un punto P y T es una afinidad, entonces $T(P^*)$ es el transformado isotómico de $T(P)$.

Así pues nos basta con considerar un triángulo concreto, por ejemplo, de vértices $A(0,1)$, $B(0,0)$ y $C(1,0)$.

Su baricentro es $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $r(t)=(\frac{1}{3} + t, \frac{1}{3} + m t)$ una recta genérica que pasa por G con pendiente m.

El transformado isotómico de $r(t)$ es $h(t)=(\frac{(1+3 m t)(-1+3(1+m) t)}{-3+9(1+m+m^2) t^2}, \frac{(1+3 t)(-1+3(1+m) t)}{-3+9(1+m+m^2) t^2})$ de

donde, eliminando t, obtenemos su ecuación implícita

$$(2+m) x^2 + x(-2-m+2y-2my) - y(-1-2m+y+2my) = 0.$$

Para estudiar el tipo de cónica calculamos su invariante afín. Su matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} b^2(1+2m) & -b(1+a-m+2am) & -\frac{1}{2}b^2(1+2m) \\ -b(1+a-m+2am) & -2-m+a(2+a+2(-1+a)m) & \frac{1}{2}b(2+a+m+2am) \\ -\frac{1}{2}b^2(1+2m) & \frac{1}{2}b(2+a+m+2am) & 0 \end{pmatrix}$$

y dicho invariante $-3(1+m+m^2) < 0$.

Concluimos que es una hipérbola que pasa por A, B, C y G y es tangente a dicha recta en G. Salvo que la recta sea una mediana, entonces se transforma en si misma.

- b) Calculamos los centros de estas cónicas y obtenemos $(\frac{(1+2m)^2}{6(1+m+m^2)}, \frac{(2+m)^2}{6(1+m+m^2)})$, ecuación paramétrica del lugar que describen.

Eliminando m, $(1-2y)^2 + 4x(-1+x+y) = 0$, ecuación implícita de in-elipse de Steiner del triángulo ABC.

Si consideramos las rectas GI y GK, obtenemos los lugares pedidos en los problemas 1009 y 1010, respectivamente.