TRIÁNGULOS CABRI
OCTUBRE 2021

Problema 1014. (propuesto por César Beade Franco)

① Caracterizar las cónicas que son transformadas isotómicas de cualquier recta que pase por el baricentro G de un triángulo ABC.

② Determinar el lugar geométrico que describen los centros de dichas cónicas.

Solución:

① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si la recta de ecuación $ux+vy+wz=0$ (con u, v y w no todos nulos) pasa por el baricentro $G=(1:1:1)$ de dicho triángulo entonces:

$$u+v+w=0 \Rightarrow u=-(v+w)$$

por lo que, según el Problema 1013, la ecuación de su circuncónica transformada es:

$$wxy+vxz-(v+w)yz=0 \; (v \neq 0 \text{ ó } w \neq 0)$$

estando las coordenadas de su centro (conjugado de la recta del infinito) determinadas por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & w & v \\ w & 0 & -v-w \\ v & -v-w & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=-wx-wy+(2v+w)z \\ 0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & w & v \\ w & 0 & -v-w \\ v & -v-w & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=-vx+(v+2w)y+vz \end{array}\right. \Rightarrow Q=((v+w)^2 : v^2 : w^2)$$

Además, todas estas cónicas pasan por el punto G y son tangentes en este punto a la recta correspondiente, ya que la ecuación de la recta polar del punto G respecto de cualquiera de ellas es:

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & w & v \\ w & 0 & -v-w \\ v & -v-w & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(v+w)x-vy-wz$$

siendo su discriminante es $\Delta=v^2+vw+w^2$ y el determinante de su matriz asociada es $\theta=-2vw(v+w)$, por lo que vamos a distinguir cuatro casos:

❶ Si $v=0$ y $w \neq 0$, entonces, la recta considerada es la mediana correspondiente al vértice B del triángulo ABC, cuya ecuación es $x-z=0$, siendo la cónica correspondiente un par de rectas secantes, cuya ecuación es:

$$y(x-z)=0$$

y está formado por la mediana correspondiente al vértice B del triángulo ABC y la recta CA.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
OCTUBRE 2021

❷ Si $v \neq 0$ y $w = 0$, entonces, la recta considerada es la mediana correspondiente al vértice C del triángulo ABC, cuya ecuación es $x - y = 0$, siendo la cónica correspondiente un par de rectas secantes, cuya ecuación es:

$$z(x-y) = 0$$

y está formado por la mediana correspondiente al vértice C del triángulo ABC y la recta AB.

❸ Si $v \neq 0$, $w \neq 0$ y $v + w = 0$, entonces, la recta considerada es la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC, cuya ecuación es $y - z = 0$, siendo la cónica correspondiente un par de rectas secantes, cuya ecuación es:

$$x(y-z) = 0$$

y está formado por la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC y la recta BC.

❹ Si $v \neq 0 \neq w$ y $v + w \neq 0$, entonces, la recta considerada corta a la recta BC en el punto $(0 : w : -v)$, siendo la cónica correspondiente no degenerada y puede ocurrir que:

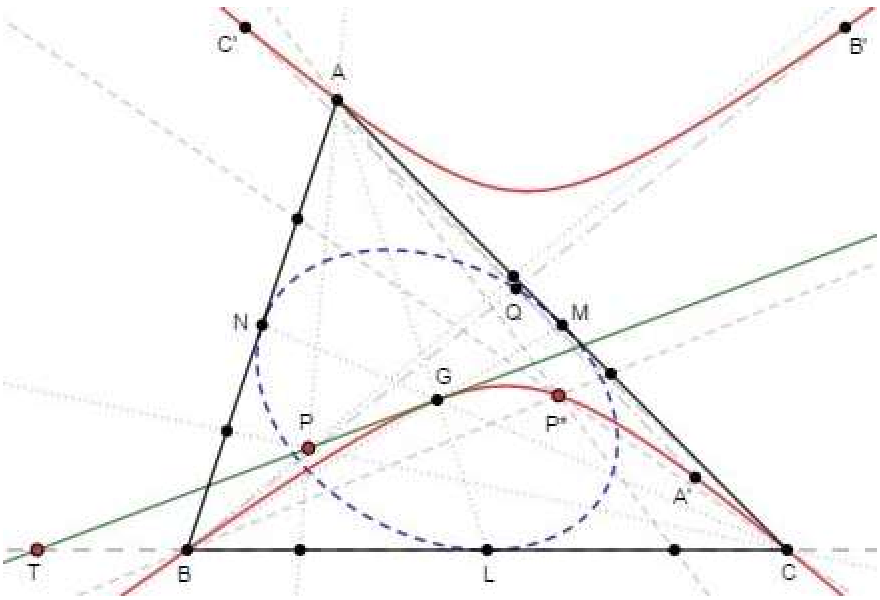
- El punto $(0 : w : -v)$ de intersección entre la recta considerada y la recta BC esté situado sobre la prolangción del segmento orientado CB, en cuyo caso $v, w > 0$, por lo que:

$$vw > 0$$

luego:

$$\Delta = v^2 + vw + w^2 > 0$$

y, por tanto, la cónica correspondiente es una hipérbola.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

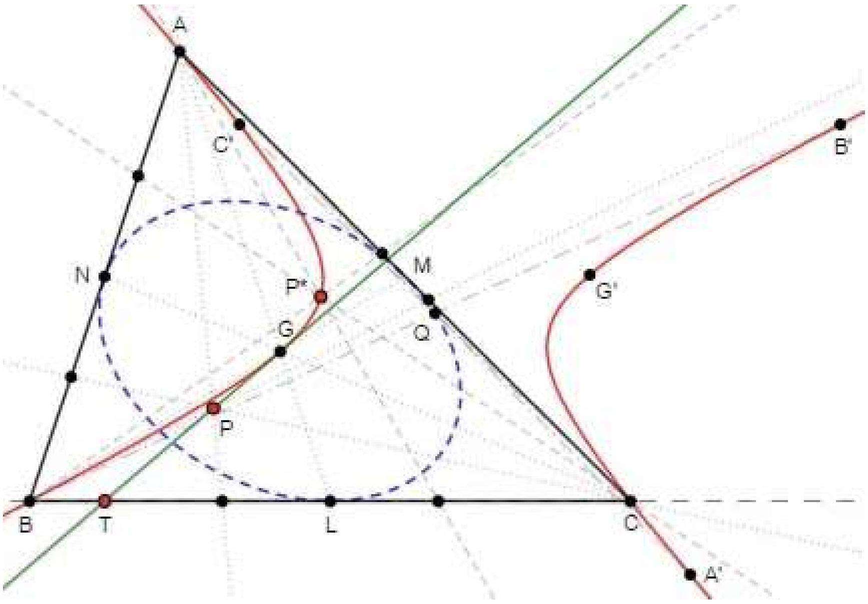
✦ El punto $(0:w:-v)$ de intersección entre la recta considerada y la recta BC esté situado en el interior del segmento BL, siendo L el punto medio del segmento BC, en cuyo caso $v<0, w>0$ y $w>-v$ (por encontrarse este punto en el semiplano $y>z$), por lo que:

$$v+w>0 \underset{w>0}{\Rightarrow} w(v+w)>0$$

luego:

$$\Delta = v^2+vw+w^2 = v^2+w(v+w)>0$$

y, por tanto, la cónica correspondiente es una hipérbola.



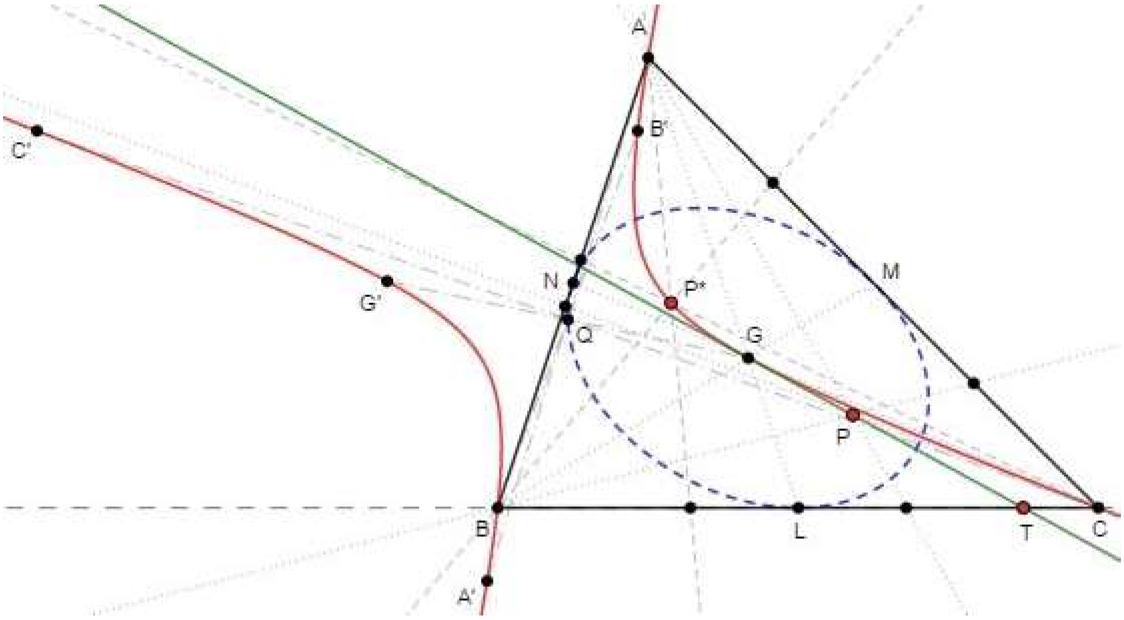
★ El punto $(0:w:-v)$ de intersección entre la recta considerada y la recta BC esté situado en el interior del segmento LC, siendo L el punto medio del segmento BC, en cuyo caso $v<0, w>0$ y $w<-v$ (por encontrarse este punto en el semiplano $y<z$), por lo que:

$$v+w<0 \underset{v<0}{\Rightarrow} v(v+w)>0$$

luego:

$$\Delta = v^2+vw+w^2 = v(v+w)+w^2>0$$

y, por tanto, la cónica correspondiente es una hipérbola.



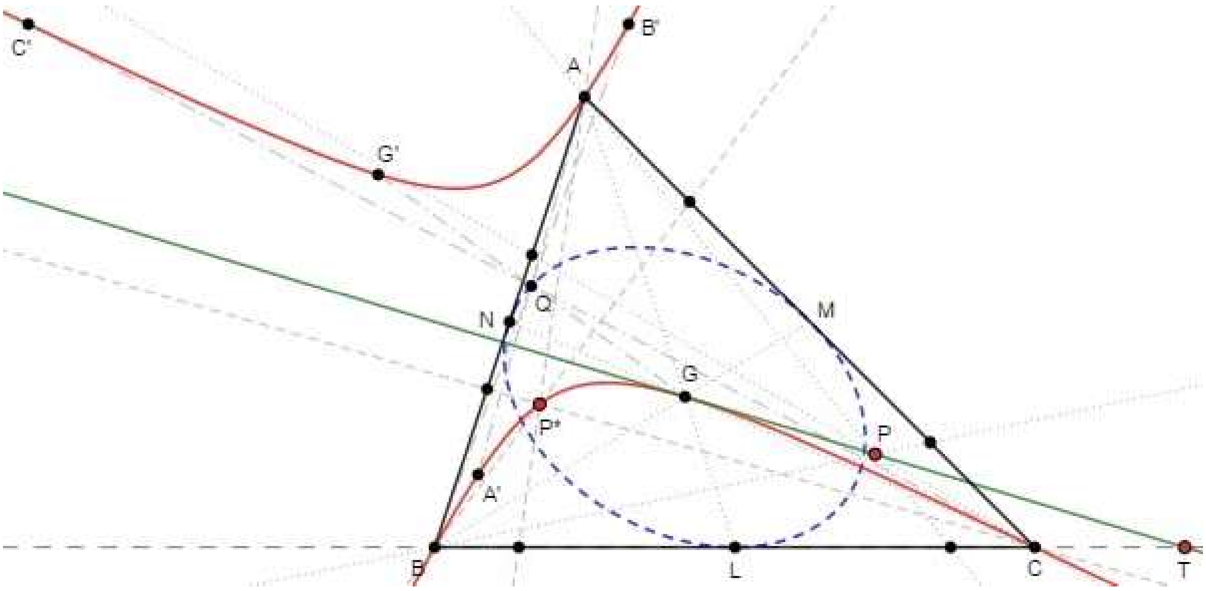
✶ El punto $(0 : w : -v)$ de intersección entre la recta considerada y la recta BC esté situado sobre la prolangción del segmento orientado BC, en cuyo caso $v, w < 0$, por lo que:

$$vw > 0$$

luego:

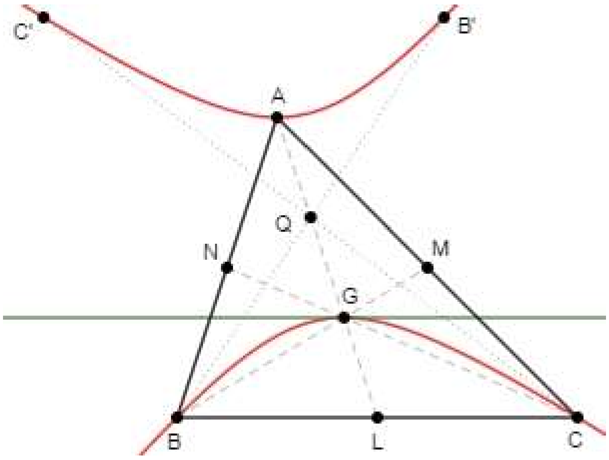
$$\Delta = v^2 + vw + w^2 > 0$$

y, por tanto, la cónica correspondiente es una hipérbola.



TRIÁNGULOS CABRI
OCTUBRE 2021

✸ La recta considerada sea paralela a BC, en cuyo caso $(0 : w : -v) = (0 : 1 : -1)$, por lo que $v = w = 1$, luego $\Delta = 3 > 0$ y, por tanto, la cónica correspondiente es una hipérbola con centro en el punto medio $Q = (4 : 1 : 1)$ del segmento AG.



② Eliminando los parámetros k, v y w del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = k(v+w)^2 \\ y = kv^2 \\ z = kw^2 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

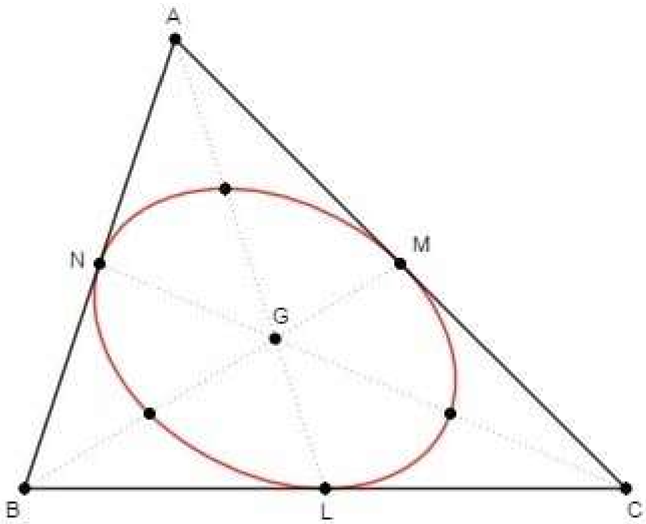
resulta que el centro $Q = ((v+w)^2 : v^2 : w^2)$ de la cónica:

$$wxy + vxz - (v+w)yz = 0$$

está situado sobre la cónica de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

que es la inelipse de Steiner del triángulo ABC:



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega