Edición del 1 de Septiembre al 31 de Octubre de 2021

Propuesto por César Beade Franco, profesor de matemáticas jubilado de Cee (La Coruña)

***Problema* 1014**

a) Caracterizar las curvas que son transformadas isotómicas de cualquier recta que pasa por el baricentro G de un triángulo ABC.

b) Calcular el lugar geométrico de los centros de las curvas del apartado a)

Beade, C. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

a) El conjugado isotómico de un punto P es aquél cuyas coordenadas baricéntricas son las inversas de las de P.

Si tenemos una recta que pasa por el baricentro G su ecuación es de la forma $px + qy + rz = 0$ donde $p + q + r = 0$.

La transformada isotómica de esta recta es la cónica

$$pyz + qzx - (p + q)xy = 0$$

que es una cónica que pasa por los vértices del triángulo ABC.

El determinante de la matriz de esta cónica es $pq(p + q)$, que cuando p, q o $p + q$ se anulen dará lugar a una cónica degenerada consistente, en cada caso, por la mediana de un lado junto con ese lado, como es fácil comprobar.

Para clasificar esta cónica hallamos los puntos del infinito. Se obtienen haciendo $z = -(x + y)$.

Sustituyendo en la ecuación de la cónica y después de simplificar llegamos a la ecuación

$$q^2x + 2(p + q)xy + p^2y = 0$$

cuyo discriminante es $(p + q)^2 - pq = p^2 + pq + q^2 > 0$ siempre cualesquiera que sean p y q.

Por tanto, se trata de una hipérbola.

b) Veamos cuál es su centro. El polo de la recta del infinito $x + y + z = 0$ es el punto de coordenadas

$$Z = \left(\frac{p}{q(p+q)}, \frac{q}{p(p+q)}, \frac{p+q}{pq}\right).$$

Esa es una parametrización de la cónica $(x + y - z)^2 - 4xy = 0$, que es la elipse inscrita de Steiner.

■