# TRIÁNGULOS CABRI
# OCTUBRE 2021

**<u>Problema 1015.</u>** (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo $ABC$, se considera el segundo punto $T$ de intersección entre su Inelipse de Steiner y la mediana correspondiente al vértice $A$. Determinar y representar gráficamente el lugar geométrico que describe un punto $P$ tal que su conjugado isotómico $P^{\bullet}$ está situado sobre la recta tangente a la Inelipse de Steiner del triángulo $ABC$ en el punto $T$.

*<u>Solución:</u>*

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo $ABC$, como las ecuaciones de su circunelipse de Steiner y de la mediana correspondiente al vértice $A$ son:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \\ 0 = y - z \end{array}\right. \Rightarrow T = (4 : 1 : 1)$$

entonces, la ecuación de la recta tangente a la inelipse de Steiner en el punto $T$ es:

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x - 2y - 2z$$

por lo que, si $P = (u : v : w)\ (u + v + w > 0)$, imponiendo que dicha recta tangente pase por el punto $P^{\bullet} = (vw : uw : uv)$, obtenemos que:

$$2uv + 2uw - vw = 0$$

lo cual significa que el punto $P$ ha de estar situado sobre la cónica de ecuación:

$$2xy + 2xz - yz = 0$$

que es una hipérbola circunscrita al triángulo $ABC$ y con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $Q = (5 : 2 : 2)$, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta = \dfrac{9}{4} > 0$, estando sus puntos del infinito determinados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = 2xy + 2xz - yz \\ 0 = x + y + z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I_1 = (1 : -2 : 1) \\ I_2 = (1 : 1 : -2) \end{array}\right.$$

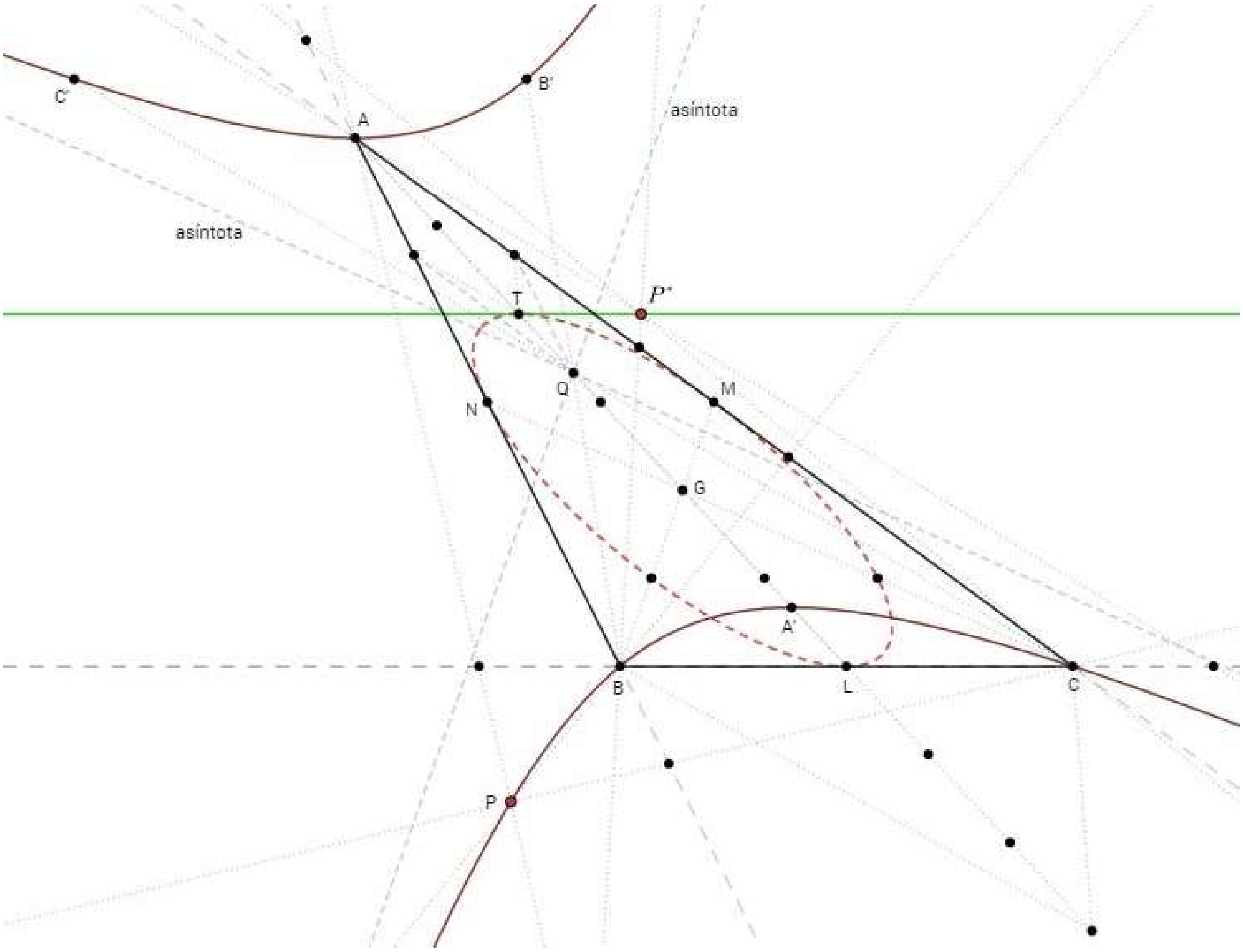
y, por tanto, sus asíntotas son paralelas a las medianas correspondientes a los vértices $B$ y $C$ del triángulo $ABC$, cuyas respectivas ecuaciones son $x - z = 0$ y $x - y = 0$. Además, para la construcción del centro de esta hipérbola, utilizaremos que:

$$Q = (5 : 2 : 2) = \left(\frac{5}{9} : \frac{2}{9} : \frac{2}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

y, una vez construído éste, para construir la hipérbola,basta con considerar los puntos $A$, $B$ y $C$ y sus respectivos puntos simétricos $A'$, $B'$ y $C'$ con respecto al punto $Q$.

**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**

# TRIÁNGULOS CABRI
# OCTUBRE 2021




**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**