

# TRIÁNGULOS CABRI

## OCTUBRE 2021

**Problema 1016.** (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados un triángulo  $ABC$  y un punto  $P$  no situado sobre ninguno de sus vértices, se considera el punto  $X$  de intersección entre la ceviana  $AP$  y la circuncunferencia circunscrita al triángulo. Determinar:

- ① El lugar geométrico que debe describir el punto  $P$  para que  $XB = XP$ .
- ② El lugar geométrico que debe describir el punto  $P$  para que  $XB = XC$ .
- ③ Todas las posiciones que puede ocupar el punto  $P$  para que  $XB = XP = XC$ .

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo  $ABC$ , si  $P = (u : v : w)$  ( $u + v + w > 0$ ), como:

$$AP \equiv wy - vz = 0$$

y:

$$\odot(ABC) \equiv c^2xy + b^2xz + a^2yz$$

resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, obtenemos que:

$$X = (-a^2vw : v(c^2v + b^2w) : w(c^2v + b^2w))$$

siendo:

$$\begin{cases} XB^2 = \frac{a^2b^2w^2}{c^2v^2 - a^2vw + b^2vw + c^2vw + b^2w^2} \\ XC^2 = \frac{a^2b^2v^2}{c^2v^2 - a^2vw + b^2vw + c^2vw + b^2w^2} \\ XP^2 = \frac{(c^2uv + b^2uw + a^2vw)^2}{(u + v + w)^2(c^2v^2 - a^2vw + b^2vw + c^2vw + b^2w^2)} \end{cases}$$

por lo que:

- ① Imponiendo la condición del enunciado, resulta que:

$$XB = XP \Leftrightarrow 0 = XB^2 - XP^2 = \frac{[c^2uv + b(b-a)uw + a(a-b)vw - abw^2][c^2uv + b(b+a)uw + a(a+b)vw - abw^2]}{(u + v + w)^2(c^2v^2 - a^2vw + b^2vw + c^2vw + b^2w^2)}$$

lo cual significa que el punto  $P$  ha de estar situado sobre una de las dos circunferencias cuyas ecuaciones son:

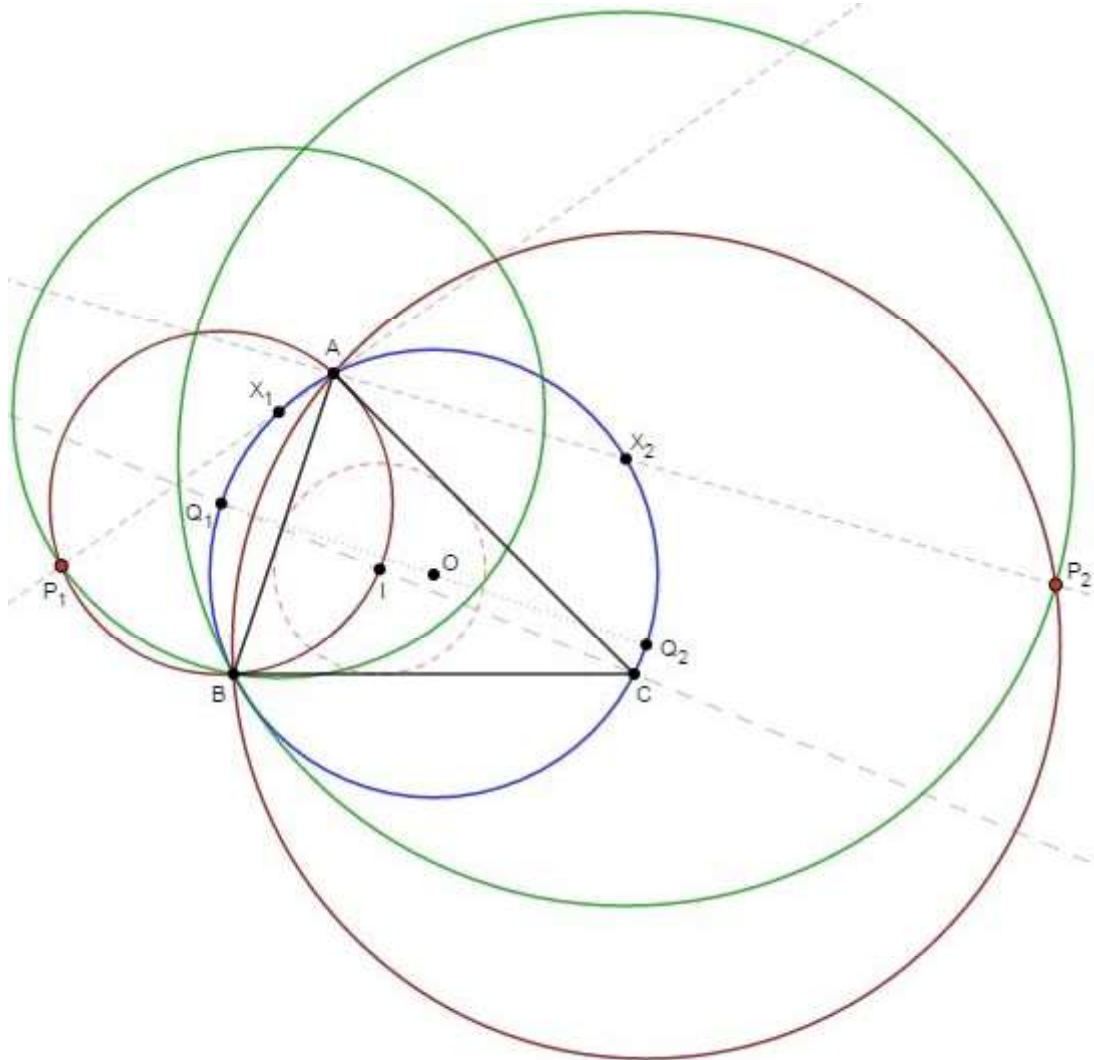
$$\begin{cases} \odot_1 \equiv 0 = c^2xy + b(b-a)xz + a(a-b)yz - abz^2 = c^2xy + b^2xz + a^2yz - abz(x + y + z) \\ \odot_2 \equiv 0 = c^2xy + b(b+a)xz + a(a+b)yz - abz^2 = c^2xy + b^2xz + a^2yz + abz(x + y + z) \end{cases}$$

- ② La circunferencia  $\odot_1$  pasa por los puntos  $A$  y  $B$  y por el incentro  $I = (a : b : c)$ , siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto  $Q_1 = (a(a+b) : b(a+b) : -c^2)$  de intersección entre la bisectriz  $CI$ , cuya ecuación es  $bx - ay = 0$ , y la circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$ .

# TRIÁNGULOS CABRI

## OCTUBRE 2021

- ⊗ La circunferencia  $\mathbb{C}_1$  pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto  $Q_2 = (-a(a-b) : b(a-b) : c^2)$ , simétrico del punto  $Q_1$  respecto del circuncentro  $O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$  del triángulo  $ABC$ .



- ② Imponiendo la condición del enunciado, resulta que:

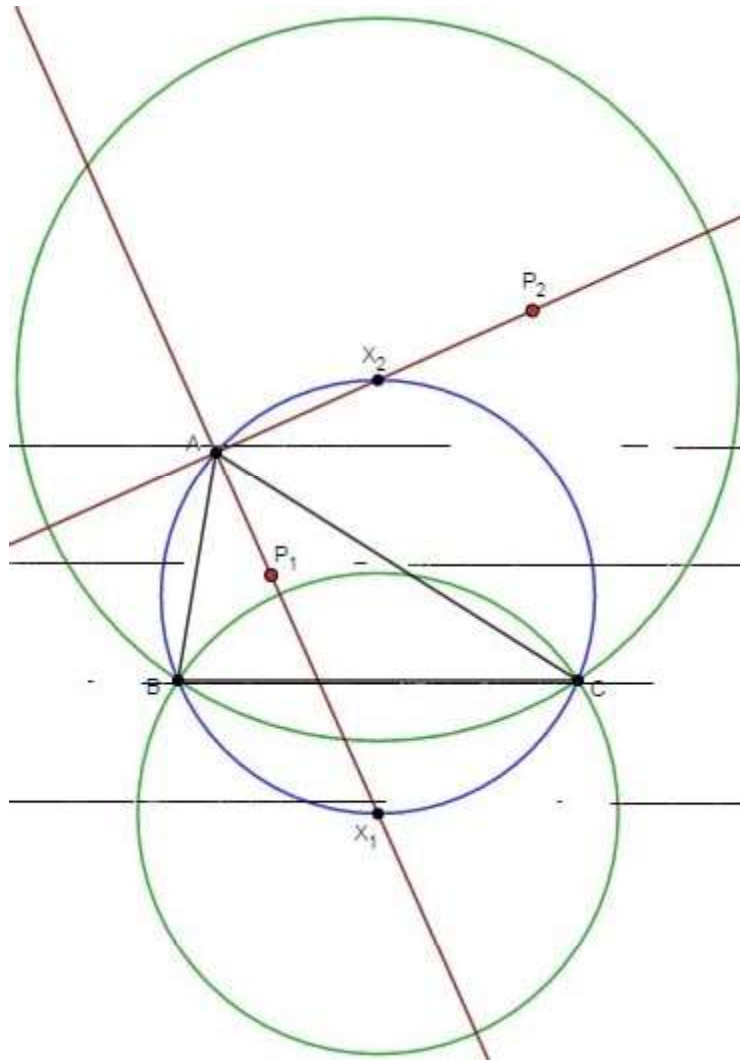
$$XB = XC \Leftrightarrow 0 = XB^2 - XC^2 = -\frac{a^2(cv - bw)(cv + bw)}{c^2v^2 - a^2vw + b^2vw + c^2vw + b^2w^2} \Leftrightarrow (cv - bw)(cv + bw) = 0$$

lo cual significa que el punto  $P$  ha de estar situado sobre una de las dos rectas bisectrices correspondientes al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ , cuyas respectivas ecuaciones son:

$$\begin{cases} r_1 \equiv 0 = cy - bz \\ r_2 \equiv 0 = cy + bz \end{cases}$$

# TRIÁNGULOS CABRI

## OCTUBRE 2021



③ Resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} \mathbb{C}_1 \cap r_1 = \{(1 : 0 : 0), (a : b : c)\} = \{A, I\} \\ \mathbb{C}_1 \cap r_2 = \{(1 : 0 : 0), (a : b : -c)\} = \{A, I_c\} \\ \mathbb{C}_2 \cap r_1 = \{(1 : 0 : 0), (-a : b : c)\} = \{A, I_a\} \\ \mathbb{C}_2 \cap r_2 = \{(1 : 0 : 0), (a : -b : c)\} = \{A, I_b\} \end{cases}$$

por lo que, para que se verifique que  $XB = XP = XC$ , el punto  $P$  ha de estar situado en el incentro o en alguno de los exincentros del triángulo  $ABC$ .