TRIÁNGULOS CABRI
OCTUBRE 2021

Problema 1017. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con baricentro G y punto simediano K, se consideran los puntos U y X de intersección de su circunferencia circunscrita con la mediana AG y la simediana AK, respectivamente. Probar que:

$$XB = XK \Leftrightarrow UB = UG$$

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} G = (1:1:1) \\ K = (a^2 : b^2 : c^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AG \equiv 0 = y - z \\ AK \equiv 0 = c^2 y - b^2 z \end{cases}$$

y:

$$\odot(ABC) \equiv c^2xy + b^2xz + a^2yz$$

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} U = (-a^2 : b^2 + c^2 : b^2 + c^2) \\ X = (-a^2 : 2b^2 : 2c^2) \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} UB^2 = \dfrac{a^2b^2}{-a^2 + 2b^2 + 2c^2} \\ UG^2 = \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{9(-a^2+2b^2+2c^2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} XB^2 = \dfrac{a^2c^2}{-a^2+2b^2+2c^2} \\ XK^2 = \dfrac{9a^4b^2c^2}{(-a^2+2b^2+2c^2)(a^2+b^2+c^2)} \end{cases}$$

por lo que:

① $UB = UG \Leftrightarrow 0 = UB^2 - UG^2 = \dfrac{(a^2 - 3ab + b^2 + c^2)(a^2 + 3ab + b^2 + c^2)}{9(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)} \Leftrightarrow a^2 - 3ab + b^2 + c^2 = 0$

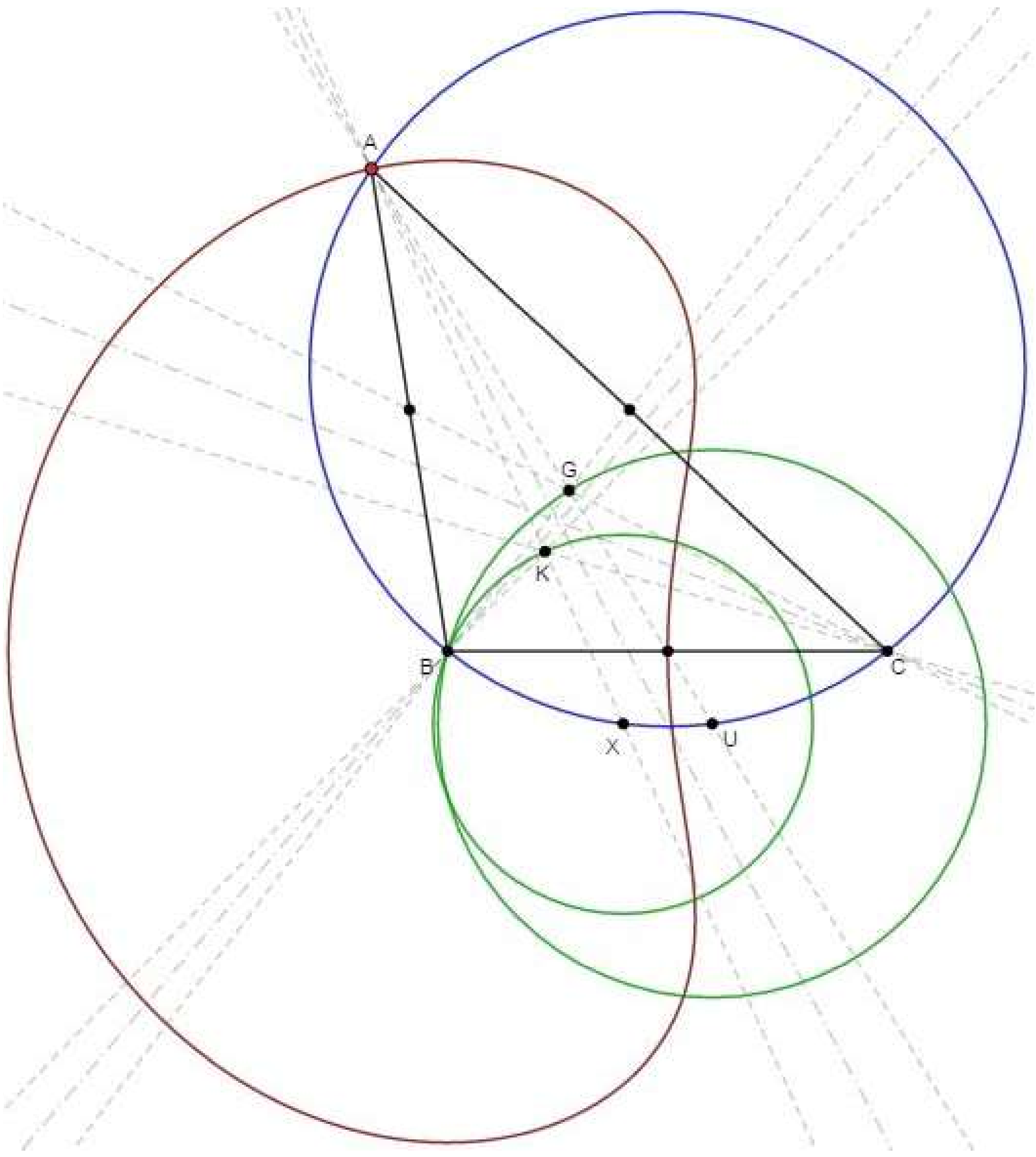
② $XB = XK \Leftrightarrow 0 = XB^2 - XK^2 = \dfrac{a^2c^2(a^2 - 3ab + b^2 + c^2)(a^2 + 3ab + b^2 + c^2)}{(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow a^2 - 3ab + b^2 + c^2 = 0$

y, por tanto:

$$UB = UG \Leftrightarrow a^2 - 3ab + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow XB = XK$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
OCTUBRE 2021



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega