TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de NOVIEMBRE 2021

<u>Problema 1020.</u> Dados un triángulo ABC y un punto P, se consideran los puntos medios U, V y W de los segmentos PA, PB y PC, respectivamente, y el baricentro Q del triángulo UVW. Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto P para que el punto Q esté situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC.

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P = (u : v : w)\ (u+v+w > 0)$, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} U = (2u+v+w : v : w) \\ V = (u : u+2v+w : w) \\ W = (u : v : u+v+2w) \end{array}\right. \Rightarrow Q = (4u+v+w : u+4v+w : u+v+4w)$$

Vamos a hacerlo de dos formas distintas:

① Imponiendo que el punto Q esté situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) = 0$$

resulta que:

$$uv + uw + vw = 0$$

por lo que el punto P debe estar situado sobre la cónica de ecuación:

$$xy + xz + yz = 0$$

que es la circunelipse de Steiner del triángulo ABC.

② Como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ 4u+v+w & u+4v+w & u+v+4w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ 3u & 3v & 3w \end{vmatrix} = 0$$

entonces, los puntos P, Q y G están alineados, siendo:

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right) \\ &= 2\left(\frac{4u+v+w}{6(u+v+w)} : \frac{u+4v+w}{4(u+v+w)} : \frac{u+v+4w}{4(u+v+w)}\right) - \left(\frac{u}{u+v+w} : \frac{v}{u+v+w} : \frac{w}{u+v+w}\right) \\ &= 2Q - P \end{aligned}$$

por lo que:

$$\frac{PG}{QG} = \frac{2}{1} = 2$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y, por tanto, cuando el punto Q recorre la inelipse de Steiner del triángulo ABC (cuyo centro es el punto G), el punto P recorre la elipse homotética a ella, respecto del punto G, con razón de homotecia $k = 2$, es decir, recorre la circunelipse de Steiner del triángulo ABC.