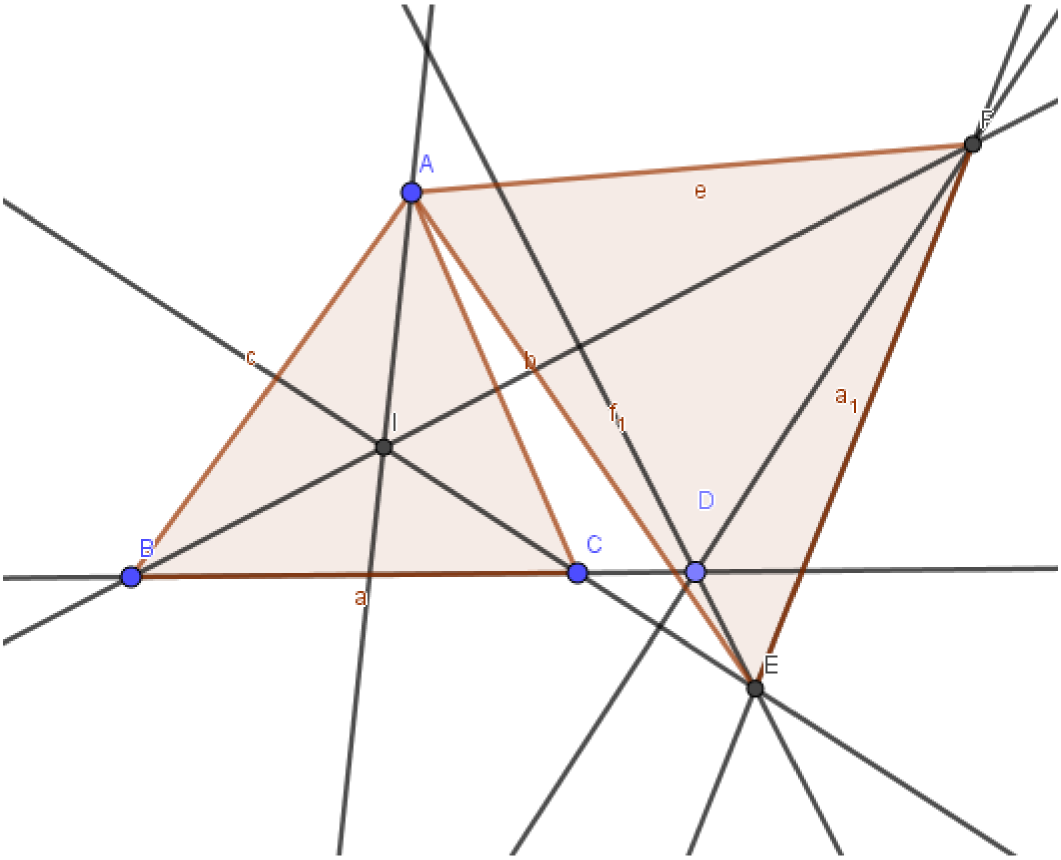
Problema 1021

Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC. La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en un punto E. La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en el punto F. Demuestre que la reflexión de A sobre la recta EF está en la recta BC.

Nota: La reflexión de un punto P sobre una recta r es el punto Q tal que r es la mediatriz del segmento PQ.

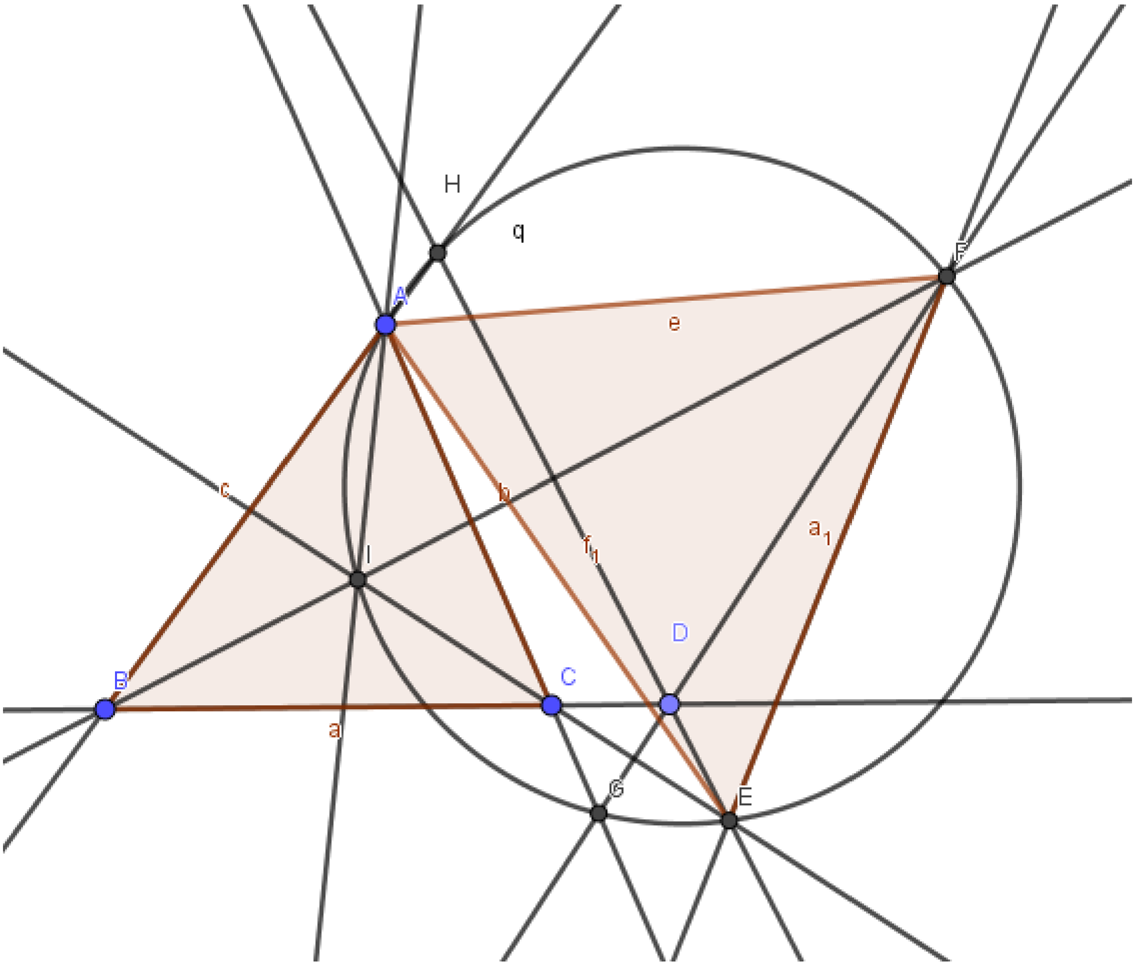
EGMO, 2021

Solución de Ricardo Barroso Campos. Jubilado. Sevilla.



$$\angle FIE = 90º - \frac{\alpha}{2} \rightarrow \angle DEC = \frac{\alpha}{2}, \angle DFI = \frac{\alpha}{2}$$

Así siendo

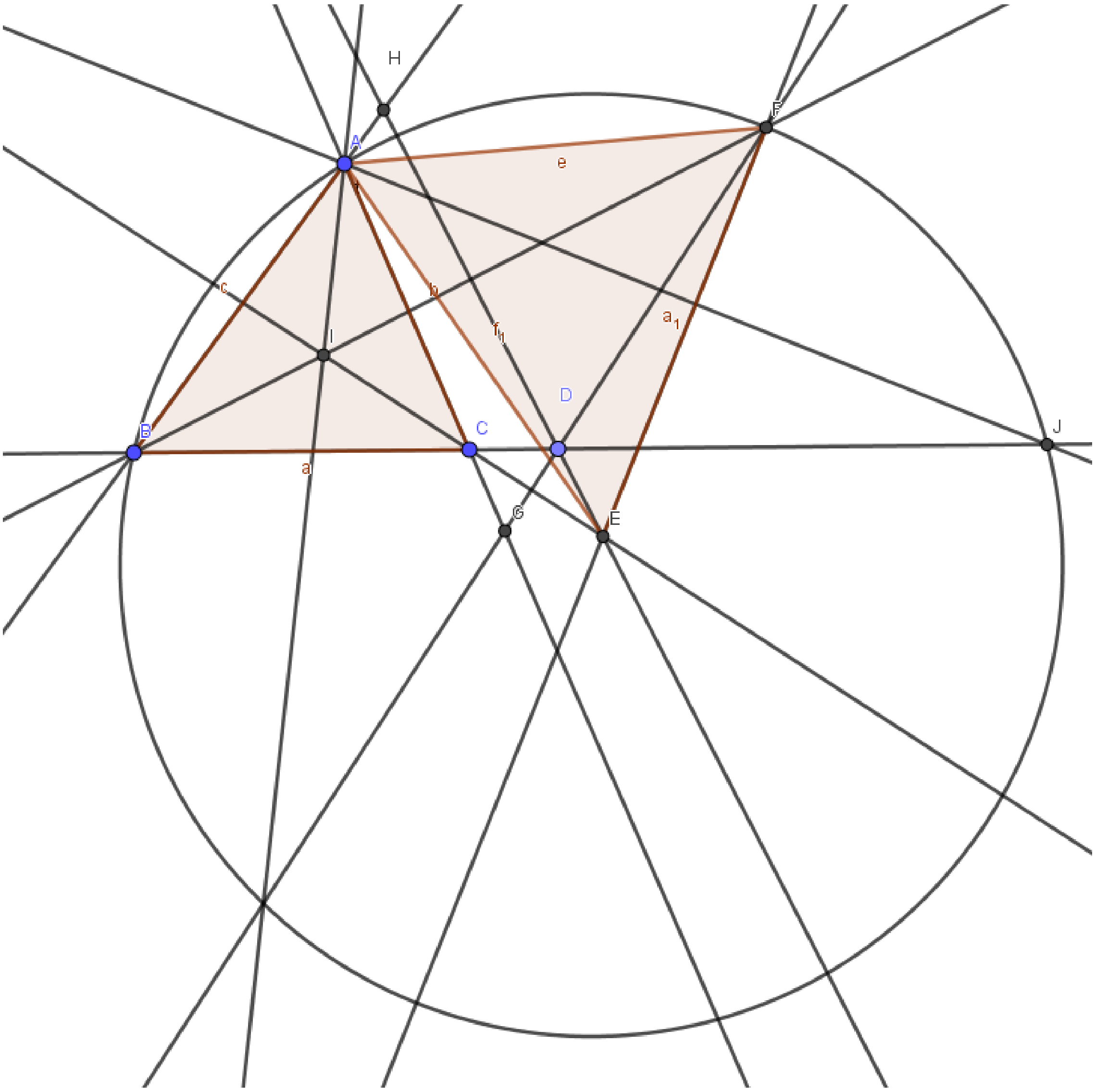


Así siendo $G = DF \cap AC, H = BA \cap DE,$

Tenemos que $\angle IAG = \angle IFG = \angle HEI = \angle HFI = \frac{\alpha}{2}$

Por ello AIGEFH son concíclicos.

Así $\angle EAF = \angle EIF = 90º - \frac{\alpha}{2}, \angle AEF = \angle AIF = 90º - \frac{\gamma}{2}, \angle AFE = 180º - \angle AIE = 90º - \frac{\beta}{2}$



Si trazamos la perpendicular a EF por A, cortará a BC en J.

Dado que

$$\angle FAJ = \angle FBJ = \frac{\beta}{2}$$

J cqd está sobre la recta BC.