TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de NOVIEMBRE 2021

Problema 1021. (EGMO, 2021) Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC. La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en un punto E. La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en un punto F. Demuestre que la reflexión de A sobre la recta EF está en la recta BC.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto la triángulo ABC, como:

$$I=(a:b:c)\Rightarrow\begin{cases} BI\equiv 0=cx-az \\ CI\equiv 0=bx-ay\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} BI_\infty^\perp=(a:c-a:-c) \\ CI_\infty^\perp=(a:-b:b-a)\end{cases}$$

si $D=(0:t:1-t)\ (t\in\mathbb{R})$, entonces:

$$\begin{cases} DE\equiv 0=[a(1-t)-c]x+a(1-t)y-atz \\ DF\equiv 0=(b-at)x+a(1-t)y-atz\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} E=DE\cap CI=(at:bt:a+b-c-(a+b)t) \\ F=DF\cap BI=(a(1-t):-b+(a+c)t:c(1-t))\end{cases}$$

por lo que:

$$EF\equiv 0=\left[a(a+b+c)t^2-\left((a+b)^2-c^2\right)t+b(a+b-c)\right]x-a(1-t)[(a+b+c)t-a-b+c]y+at[(a+b+c)t-2b]z$$

siendo la reflexión del punto A sobre la recta EF el punto:

$$A'=(0:b-(a+b+c)t:(a+b+c)t-a-b)$$

y, por tanto, este punto está situado sobre la recta BC, cuya ecuación es $x=0$.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega