

TRIÁNGULOS CABRI

16 a 30 de Noviembre de 2021

Problema 1022. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC . La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en un punto E . La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en un punto F . Determinar y representar gráficamente la envolvente de las rectas EF cuando el punto D recorre la recta BC .

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como:

$$I = (a : b : c) \Rightarrow \begin{cases} BI \equiv 0 = cx - az \\ CI \equiv 0 = bx - ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BI_{\infty}^{\perp} = (a : c - a : -c) \\ CI_{\infty}^{\perp} = (a : -b : b - a) \end{cases}$$

si $D = (0 : t : 1 - t)$ ($t \in \mathbb{R}$), entonces:

$$\begin{cases} DE \equiv 0 = [a(1 - t) - c]x + a(1 - t)y - atz \\ DF \equiv 0 = (b - at)x + a(1 - t)y - atz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = DE \cap CI = (at : bt : a + b - c - (a + b)t) \\ F = DE \cap BI = (a(a - t) : a - b + c - (a + c)(1 - t) : c(1 - t)) \end{cases}$$

por lo que:

$$EF \equiv 0 = [a(a + b + c)t^2 - (a + b + c)(a + b - c)t + b(a + b - c)]x - a(1 - t)[(a + b + c)t - a - b + c]y + at[(a + b + c)t - 2b]z$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t :

$$\begin{cases} 0 = [a(a + b + c)t^2 - (a + b + c)(a + b - c)t + b(a + b - c)]x - a(1 - t)[(a + b + c)t - a - b + c]y + at[(a + b + c)t - 2b]z \\ 0 = (a + b + c)[(2t - 1)a - b + c]x + 2a[(a + b + c)t - a - b]y + 2a[(a + b + c)t - b]z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$S^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 - 2a^2S_Ayz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} S^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2c^2 & -a^2S_A \\ 0 & -a^2S_A & -a^2b^2 \end{vmatrix} = a^4S^4 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = S^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 - 2a^2S_Ayz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow h_A^{\infty} = (a^2 : -S_C : -S_B)$$

siendo sus diámetros paralelos a la altura correspondiente al vértice A del triángulo ABC .

TRIÁNGULOS CABRI

16 a 30 de Noviembre de 2021

Además:

- ① Esta parábola corta a la altura correspondiente al vértice A del triángulo ABC , cuya ecuación es $S_{By} - S_{Cz} = 0$, en el punto medio $V = (a^2 : S_C : S_B)$ del segmento AQ , donde el punto Q es el pie del punto A sobre la recta BC , siendo la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto V :

$$x - y - z = 0$$

por lo que dicha recta tangente es paralela a la recta BC (ya que ambas tienen el mismo punto del infinito $(0 : 1 : -1)$) y, por tanto, es perpendicular a los diámetros de la parábola, lo cual significa que el punto V es el vértice de ésta y la altura correspondiente al vértice A del triángulo ABC es su eje.

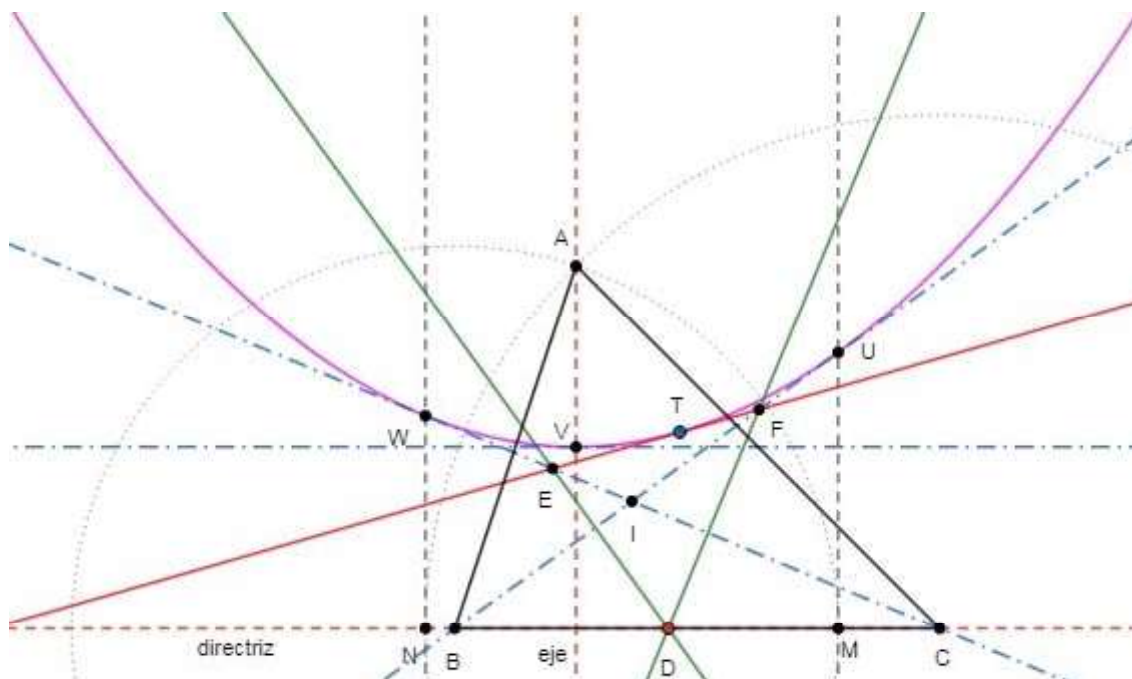
- ② Esta parábola corta a la bisectriz BI únicamente en el punto $U = (ac : -S_A : c^2)$ (por lo que es tangente a ella en este punto, ya que la bisectriz BI no es un diámetro de la parábola), siendo el pie del punto U sobre la recta BC el punto $M = (0 : a - c : c)$ de intersección entre dicha recta y la circunferencia con centro B y radio BC , por lo que:

$$[d(U, BC)]^2 = UM^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)c^2}{(a - b + c)(a + b + c)} = UA^2 \Rightarrow d(U, BC) = UA$$

- ③ Esta parábola corta a la bisectriz CI únicamente en el punto $W = (ab : b^2 : -S_A)$ (por lo que es tangente a ella en este punto, ya que la bisectriz CI no es un diámetro de la parábola), siendo el pie del punto W sobre la recta BC el punto $N = (0 : b : a - b)$ de intersección entre dicha recta y la circunferencia con centro C y radio BC , por lo que:

$$[d(W, BC)]^2 = WN^2 = \frac{(-a + b + c)(a - b + c)b^2}{(a + b - c)(a + b + c)} = WA^2 \Rightarrow d(W, BC) = WA$$

Por tanto, esta parábola es la parábola con foco en el punto A y directriz en la recta BC , ya que cualquier parábola queda determinada por la dirección de su eje y tres de sus puntos.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega