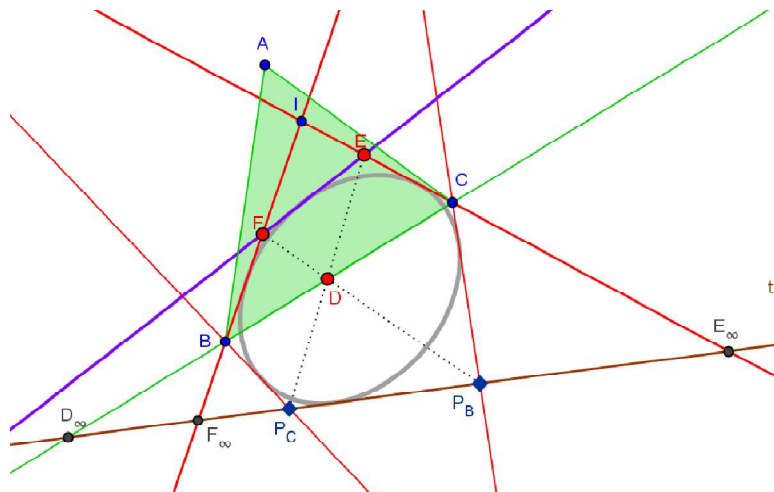


Problema 1022.- Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC . La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en un punto E . La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en un punto F . Determinar y representar gráficamente la envolvente de las rectas EF cuando el punto D recorre la recta BC .

Pérez M. A. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



1) El lugar geométrico de las envolventes es una cónica.

Para determinar qué tipo de figura es la envolvente de esas rectas vamos a olvidar de momento que tenemos un triángulo. Nos fijaremos en que tenemos tres rectas CI , BI y BC del plano proyectivo.

La recta del infinito la vamos a sustituir por una recta arbitraria $t = P_B P_C$. Con todo esto tenemos que el punto E se define ahora como el punto de intersección de la recta DP_C con la recta CI , y de forma análoga para F . Así pues, dado D proyectado desde P_C sobre CI se obtiene E ; si se proyecta desde P_B se obtiene F .

Esto es equivalente a decir que tomando un punto E cualquiera sobre CI , su proyección desde P_C sobre BC es el punto D ; la proyección de este último desde P_B sobre BI es F .

El proceso que nos lleva desde el punto E hasta el punto F está compuesto de proyecciones y secciones, así pues, la asignación $E \rightarrow F$ es una homografía entre las rectas CI y BI .

Esta homografía define una cónica tangencial con rectas-base CI y BI , que son dos tangentes de la misma.

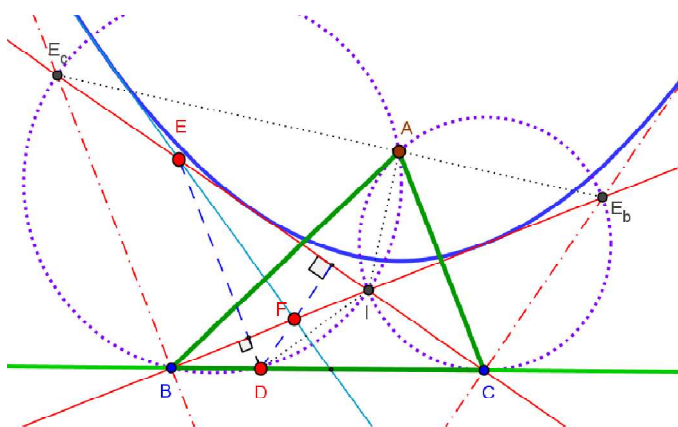
Si $E = C$ entonces $D = C$ y $F = P_B C \cap BI$, con lo que la recta EF en este caso es la recta CP_B . Análogamente otra recta EF es la BP_C .

Si tomamos el punto $E_\infty = CI \cap t$, su proyección desde P_C sobre BC es el punto D_∞ y la de éste desde P_B sobre BI es $F_\infty = BI \cap t$, esto significa que la recta t es otra recta de la cónica tangencial.

Disponemos pues de 5 rectas de la envolvente buscada. La cónica queda ya perfectamente definida.

Cuando la recta t sea la del infinito el lugar geométrico de las rectas EF es una parábola.

2) Representación de la cónica de las envolventes en el caso particular del enunciado.



En el enunciado original del problema se sustituye **perpendicular a BI** por **paralela a la bisectriz exterior de B** y de esta forma estaremos en las condiciones del apartado anterior. Las cinco tangentes de que disponemos son ahora las cuatro bisectrices de los ángulos B y C y la recta del infinito. Es fácil ver que cuando $D = B$, E es el excentro E_c y cuando $D = C$, F es el excentro E_b .

Ya sabemos que se trata de una parábola. La fijaremos con su foco y su directriz.

En una parábola toda circunferencia circunscrita al triángulo formado por tres tangentes pasa por el foco. Además, el ortocentro de este triángulo está sobre la directriz.

Con esta propiedad podemos deducir que A es el foco, pues el cuadrilátero formado por A, I , uno de los vértices y el excentro del otro es cíclico, como puede observarse en la figura.

El ortocentro de cualquier triángulo $\triangle EFI$ formado por las bisectrices interiores de B y C y una recta ' EF ' tiene a D como ortocentro, por tanto el lado BC es la directriz. ■