TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

Problema 1023-A. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con triángulo medial LMN, se consideran un punto T situado sobre la recta BC, la recta T_y paralela a AC pasando por T, la recta T_z paralela a AB pasando por T y la cónica que pasa por los puntos A, D, E, F y J, siendo:

$$\begin{cases} D = T_y \cap BM \\ E = T_y \cap CN \\ F = T_z \cap BM \\ J = T_z \cap CN \end{cases}$$

Clasificar dicha cónica, en función de la posición que ocupa el punto T en la recta BC.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $T = (0 : 1-t : t)$ $(t \in \mathbb{R})$, como:

$$\begin{cases} AC_\infty = (1 : 0 : -1) \\ AB_\infty = (1 : -1 : 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_y \equiv 0 = (1-t)x - ty + (1-t)z \\ T_z \equiv 0 = tx + ty - (1-t)z \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} D = T_y \cap BM = (t : 2(1-t) : t) \\ E = T_y \cap CN = (1-t : 1-t : 2t-1) \\ F = T_z \cap BM = (t : 1-2t : t) \\ J = T_z \cap CN = (1-t : 1-t : 2t) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por los puntos A, D, E, F y J:

$$t^2y^2 + (1-t)^2z^2 - t(2-3t)xy + (1-t)(1-3t)xz - t(1-t)yz = 0$$

Además, como el discriminante de esta cónica es:

$$\Delta = \frac{(1-t+t^2)(1-9t+9t^2)}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{6}$$

y:

$$\begin{vmatrix} 0 & -t(2-3t) & (1-t)(1-3t) \\ -t(2-3t) & 2t^2 & -t(1-t) \\ (1-t)(1-3t) & -t(1-t) & 2(1-t)^2 \end{vmatrix} = -6t^2(1-t)^2(1-3t+3t^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ \text{ó} \\ t = 0 \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{6} \rightarrow T_1 = \left(0 : \dfrac{3+\sqrt{5}}{6} : \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right) \\ t_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{6} \rightarrow T_2 = \left(0 : \dfrac{3-\sqrt{5}}{6} : \dfrac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \end{cases}$$

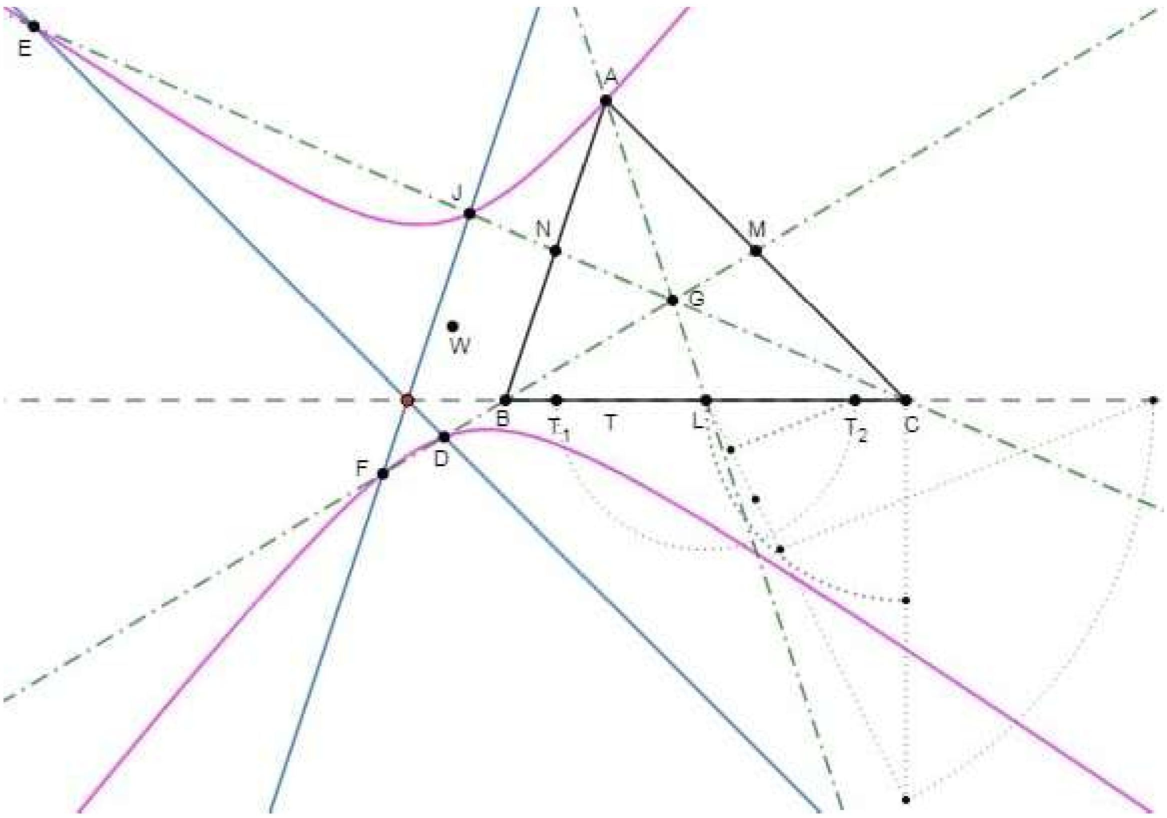
Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

puntos simétricos uno del otro respecto del punto L y tales que:

$$LT_1^2 = \frac{5a^2}{36} \Rightarrow LT_1 = \frac{\sqrt{5}\,a}{6} = \frac{\sqrt{5}\,LC}{3}$$

por lo que vamos a distinguir nueve casos:

❶ Si $t < 0$, es decir, si el punto T está situado en el interior de la semirrecta con origen en B que no contiene a C, esta cónica es una hipérbola.



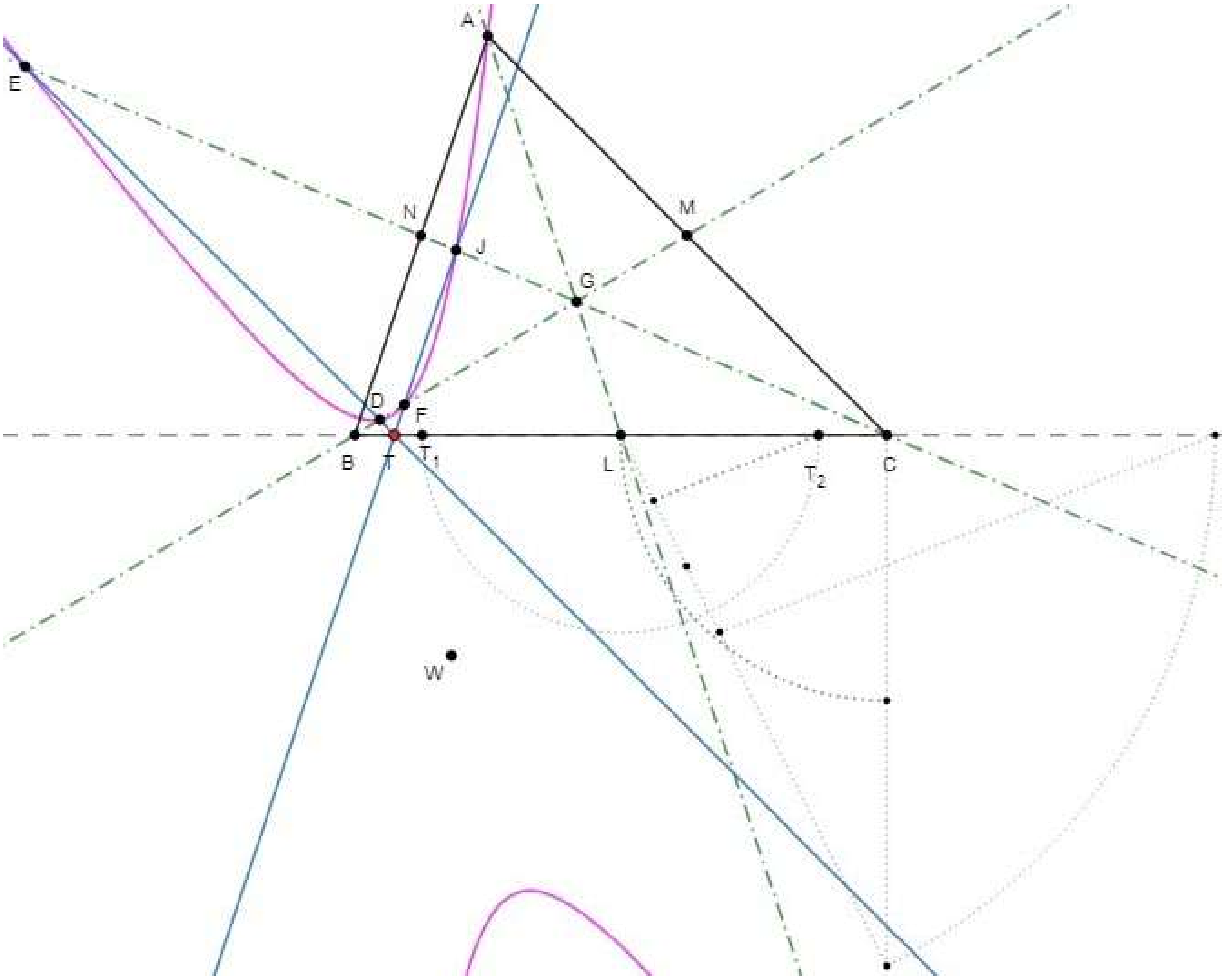
❷ Si $t = 0$, es decir, si $T = B$, esta cónica es un par de rectas secantes, cuya ecuación es:

$$z(x+z) = 0$$

y está formado por la recta AB y por la recta paralela a AC pasando por B.

TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

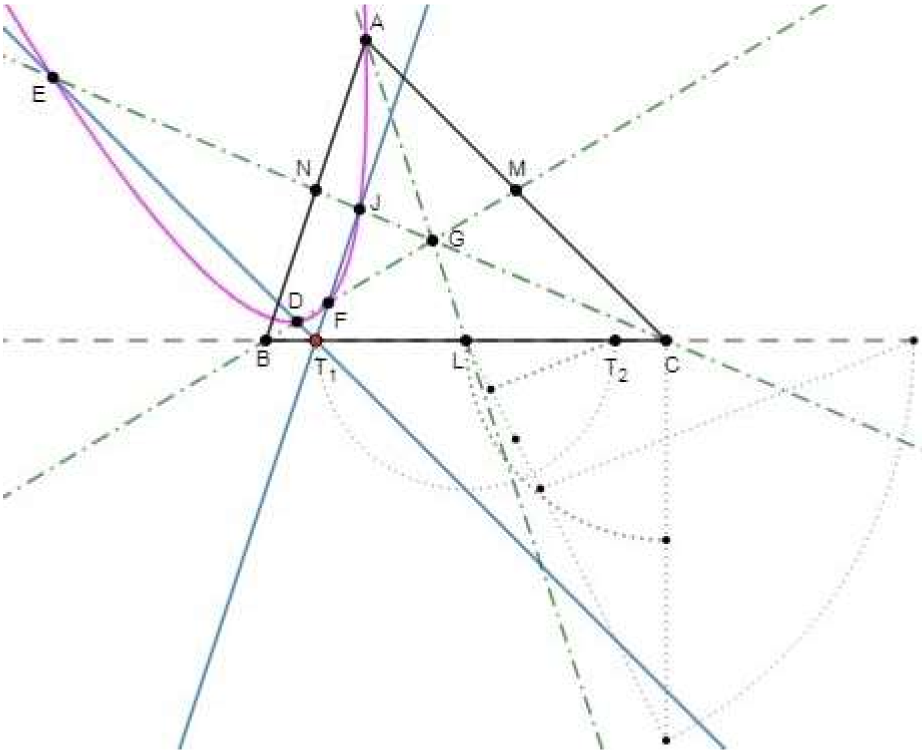
❸ Si $0 < t < \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$, es decir, si el punto T está situado en el interior del segmento BT_1, esta cónica es una hipérbola.



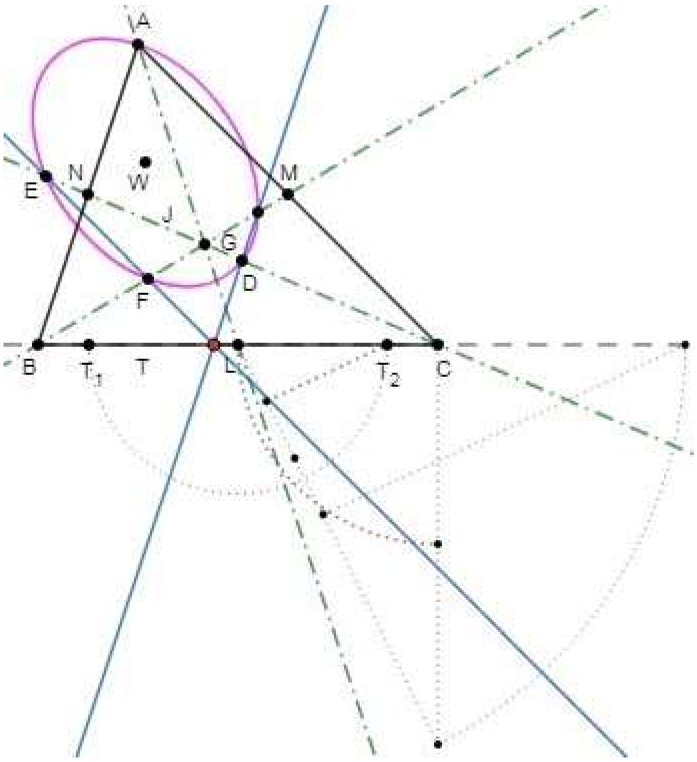
Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

❹ Si $t = \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$, es decir, si $T = T_1$, esta cónica es una parábola, cuyo eje es paralelo a la mediana AL.



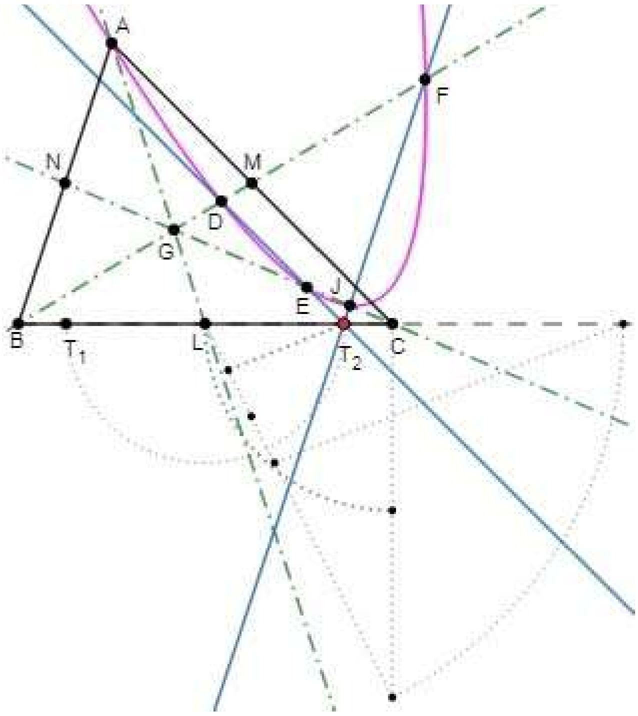
❺ Si $\dfrac{3-\sqrt{5}}{6} < t < \dfrac{3+\sqrt{5}}{6}$, es decir, si el punto T está situado en el interior del segmento T_1T_2, esta cónica es una elipse.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

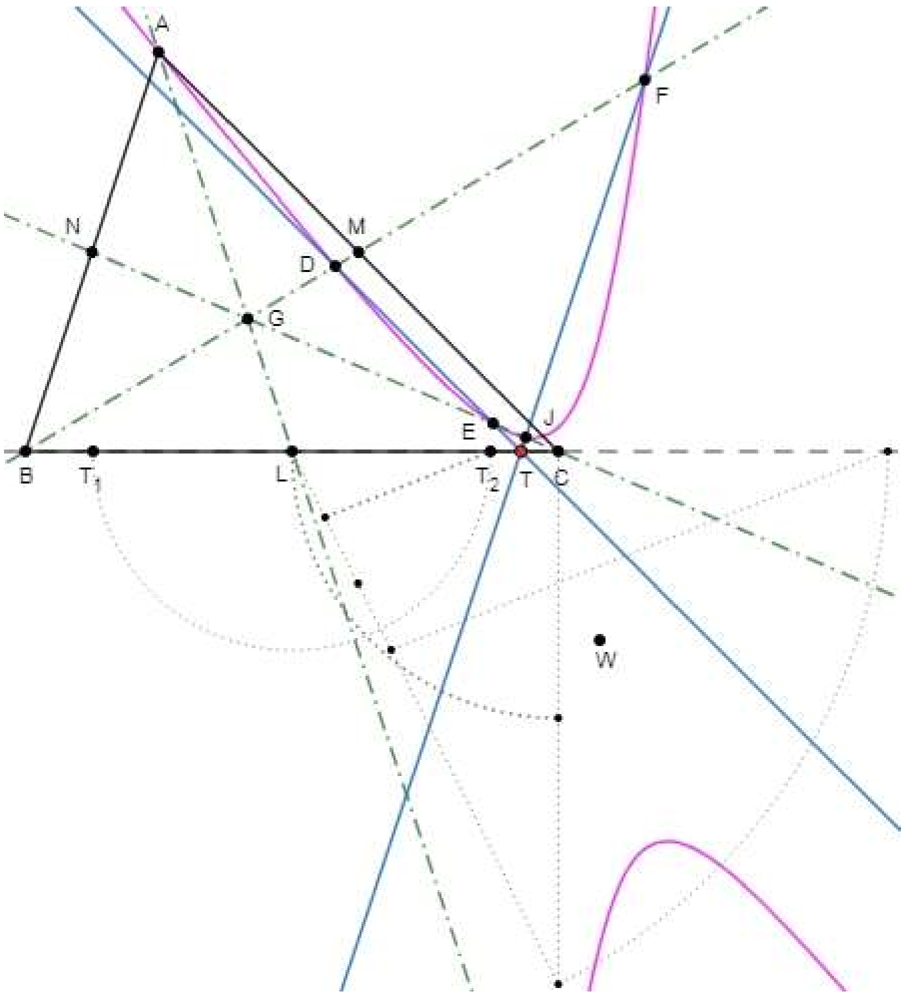
TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

❻ Si $t = \dfrac{3+\sqrt{5}}{6}$, es decir, si $T = T_2$, esta cónica es una parábola, cuyo eje es paralelo a la mediana AL.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

❼ Si $\frac{3+\sqrt{5}}{6} < t < 1$, es decir, si el punto T está situado en el interior del segmento T_2C, esta cónica es un hipérbola.



❽ Si $t = 1$, es decir, si $T = C$, esta cónica es un par de rectas secantes, cuya ecuación es:

$$y(x+y) = 0$$

y está formado por la recta AC y por la recta paralela a AB pasando por C.

❾ Si $t > 1$, es decir, si el punto T está situado en el interior de la semirrecta con origen en C que no contiene a B, está cónica es una hipérbola.