

TRIÁNGULOS CABRI

16 a 30 de Noviembre de 2021

Problema 1023-B. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con baricentro G y triángulo medial LMN , se consideran un punto T situado sobre la recta BC , la recta T_y paralela a AC pasando por T y la recta T_z paralela a AB pasando por T . Determinar y representar gráficamente la envolvente de las rectas EF cuando el punto T recorre la recta BC , siendo:

$$\begin{cases} E = T_y \cap CN \\ F = T_z \cap BM \end{cases}$$

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $T = (0 : 1 - t : t)$ ($t \in \mathbb{R}$), como:

$$\begin{cases} AC_\infty = (1 : 0 : -1) \\ AB_\infty = (1 : -1 : 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_y \equiv 0 = (1 - t)x - ty + (1 - t)z \\ T_z \equiv 0 = tx + ty - (1 - t)z \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} E = T_y \cap CN = (1 - t : 1 - t : 2t - 1) \\ F = T_z \cap BM = (t : 1 - 2t : t) \end{cases} \Rightarrow EF \equiv (1 - 3t + 3t^2)x - t(2 - 3t)y + (1 - 4t + 3t^2)z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t :

$$\begin{cases} 0 = (1 - 3t + 3t^2)x - t(2 - 3t)y + (1 - 4t + 3t^2)z \\ 0 = 3(2t - 1)x + 2(3t - 1)y + 2(3t - 2)z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$3x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 4yz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 3x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 4yz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow AL_\infty = (2 : -1 : -1)$$

siendo sus diámetros paralelos a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC . Además:

- ① Esta parábola corta a la mediana BM , cuya ecuación es $x - z = 0$, únicamente en el punto simétrico $P = (2 : -1 : 2)$ del punto $G = (1 : 1 : 1)$ con respecto al punto M , por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la mediana BM no es un diámetro de la parábola).

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

16 a 30 de Noviembre de 2021

- ② Esta parábola corta a la mediana CN , cuya ecuación es $x-y=0$, en el punto simétrico $Q=(2:2:-1)$ del punto $G=(1:1:1)$ con respecto al punto N , por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la mediana CN no es un diámetro de la parábola).
- ③ Si r_p y r_q son los rayos paralelos al eje de la parábola (es decir, paralelos a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC) que inciden en ella en los puntos P y Q , respectivamente, la reflexión rf_p de r_p sobre la recta n_p normal a la parábola en el punto P y la reflexión rf_q de r_q sobre la recta n_q normal a la parábola en el punto Q se cortan en el foco de la parábola, siendo el eje de ésta la recta paralela a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC pasando por el foco.
- ④ Como cualquier punto de la parábola equidista de su foco y de su directriz y las circunferencias $(P, Pfoco)$ y $(Q, Qfoco)$ cortan a los rayos r_p y r_q en los puntos X e Y , respectivamente, resulta que la directriz es la recta XY .
- ⑤ Finalmente, una vez construídos el foco y la directriz de la parábola, podemos construir ésta.

