TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

Problema 1023-C. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con baricentro G y triángulo medial LMN, se consideran un punto T situado sobre la recta BC, la recta T_y paralela a AC pasando por T y la recta T_z paralela a AB pasando por T. Determinar y representar graficamente la envolvente de las rectas EF cuando el punto T recorre la recta BC, siendo:

$$\begin{cases} D = T_y \cap BM \\ J = T_z \cap CN \end{cases}$$

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $T = (0 : 1-t : t)$ $(t \in \mathbb{R})$, como:

$$\begin{cases} AC_\infty = (1 : 0 : -1) \\ AB_\infty = (1 : -1 : 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_y \equiv 0 = (1-t)x - ty + (1-t)z \\ T_z \equiv 0 = tx + ty - (1-t)z \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} D = T_y \cap BM = (t : 2(1-t) : t) \\ J = T_z \cap CN = (1-t : 1-t : 2t) \end{cases} \Rightarrow DJ \equiv 3t(1-t)x + t(1-3t)y - (2-5t+3t^2)z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t:

$$\begin{cases} 0 = 3t(1-t)x + t(1-3t)y - (2-5t+3t^2)z \\ 0 = 3(1-2t)x + (1-6t)y + (5-6t)z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$9x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 6xz - 14yz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -576 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 9x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 6xz - 14yz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow AL_\infty = (2 : -1 : -1)$$

siendo sus diámetros paralelos a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC. Además:

① Esta parabola corta a la mediana BM, cuya ecuación es $x - z = 0$, únicamente en el punto medio $P = (1 : 4 : 1)$ del segmento BG, por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la mediana BM no es un diámetro de la parábola).

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

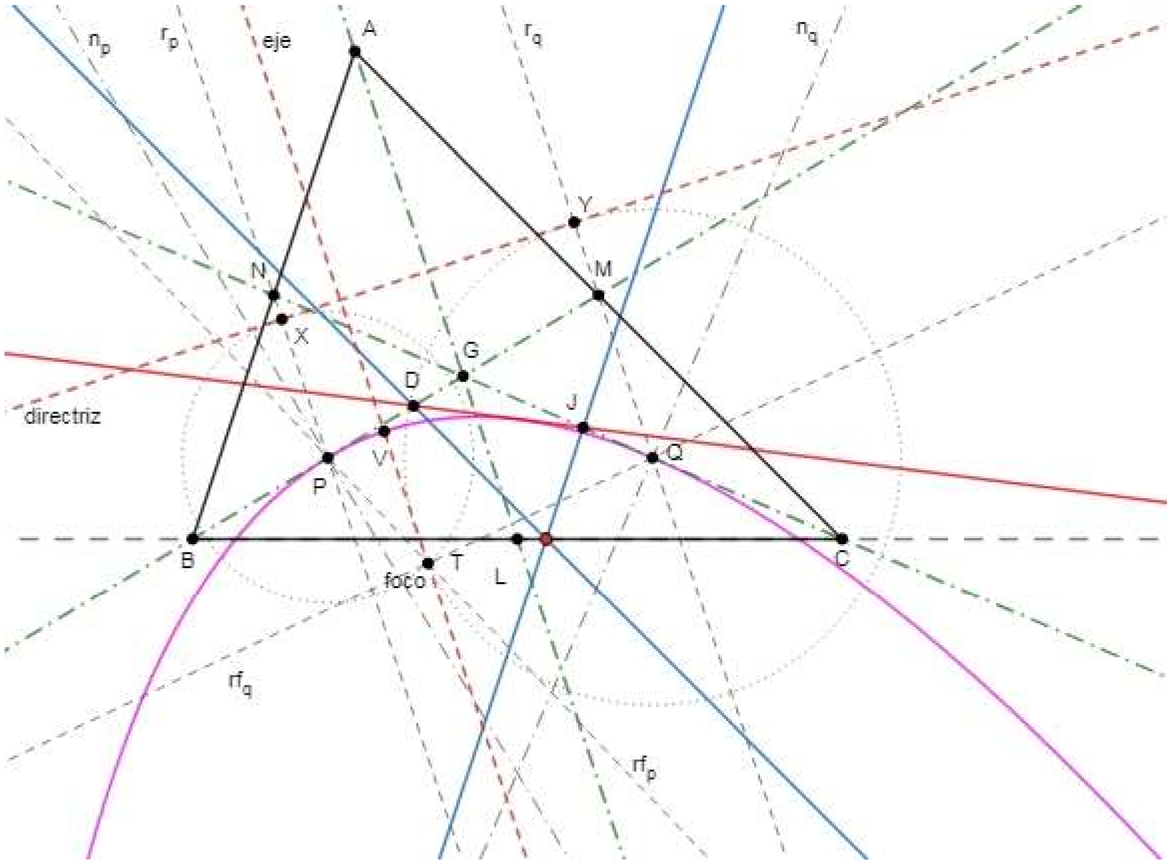
TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

② Esta parabola corta a la mediana CN, cuya ecuación es $x - y = 0$, en el punto medio $Q = (1 : 1 : 4)$ del segmento CG, por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la mediana CN no es un diámetro de la parábola).

③ Si r_p y r_q son los rayos paralelos al eje de la parábola (es decir, paralelos a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC) que inciden en ella en los puntos P y Q, respectivamente, la reflexión rf_p de r_p sobre la recta n_p normal a la parábola en el punto P y la reflexión rf_q de r_q sobre la recta n_q normal a la parábola en el punto Q se cortan en el foco de la parábola, siendo el eje de ésta la recta paralela a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC pasando por el foco.

④ Como cualquier punto de la parábola equidista de su foco y de su directriz y las circunferencias $(P, P\text{foco})$ y $(Q, Q\text{foco})$ cortan a los rayos r_p y r_q en los puntos X e Y, respectivamente, resulta que la directriz es la recta XY.

⑤ Finalmente, una vez construídos el foco y la directriz de la parábola, podemos construir ésta.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega