TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

Problema 1024-A. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con baricentro G y triángulo medial LMN, se consideran un punto T situado sobre la recta BC, la recta T_y paralela a CN pasando por T, la recta T_z paralela a BM pasando por T y la cónica que pasa por los puntos G, D, E, F y J, siendo:

$$\begin{cases} D = T_y \cap AB \\ E = T_y \cap AC \\ F = T_z \cap AB \\ J = T_z \cap AC \end{cases}$$

Clasificar dicha cónica, en función de la posición que ocupa el punto T en la recta BC.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $T = (0 : 1 - t : t)\ (t \in \mathbb{R})$, como:

$$\begin{cases} N = (1 : 1 : 0) \\ M = (1 : 0 : 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CN_\infty = (1 : 1 : -2) \\ BM_\infty = (1 : -2 : 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_y \equiv 0 = (2-t)x - ty + (1-t)z \\ T_z \equiv 0 = (1+t)x + ty - (1-t)z \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} D = T_y \cap AB = (t : 2 - t : 0) \\ E = T_y \cap AC = (1 - t : 0 : t - 2) \\ F = T_z \cap AB = (-t : 1 + t : 0) \\ J = T_z \cap AC = (1 - t : 0 : 1 + t) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por los puntos G, D, E, F y J:

$$(2-t)(1+t)x^2 - t^2y^2 - (1-t)^2z^2 + t(1-2t)xy - (1-t)(1-2t)xz - 7t(1-t)yz = 0$$

Además, como el discriminante de esta cónica es:

$$\Delta = \frac{9(1 - t + t^2)(1 - 9t + 9t^2)}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{6}$$

y:

$$\begin{vmatrix} 2(2-t)(1+t) & t(1-2t) & -(1-t)(1-2t) \\ t(1-2t) & -2t^2 & -7t(1-t) \\ -(1-t)(1-2t) & -7t(1-t) & -2(1-t)^2 \end{vmatrix} = -162t^2(1-t)^2(1+t-t^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ \text{ó} \\ t = 0 \\ \text{ó} \\ t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{6} \to T_1 = \left(0 : \dfrac{3+\sqrt{5}}{6} : \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right) \\ t_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{6} \to T_2 = \left(0 : \dfrac{3-\sqrt{5}}{6} : \dfrac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} t_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \to T_3 = \left(0 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} : \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ t_4 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \to T_4 = \left(0 : \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

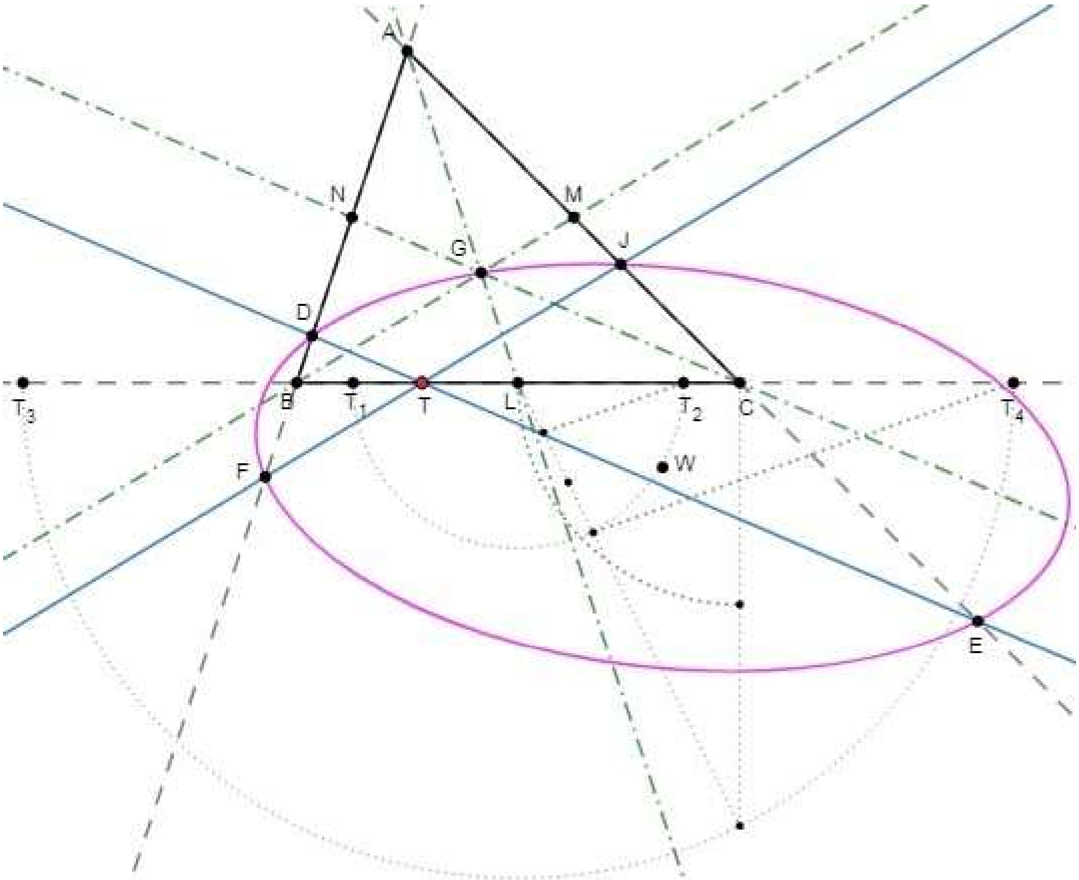
Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

donde (T_1, T_2) y (T_3, T_4) son pares de puntos simétricos uno del otro respecto del punto L y tales que:

$$\begin{cases} LT_1^2 = \dfrac{5a^2}{36} \Rightarrow LT_1 = \dfrac{\sqrt{5}\,a}{6} = \dfrac{\sqrt{5}\,LC}{3} \\ LT_3^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow LT_3 = \dfrac{\sqrt{5}\,a}{2} = \sqrt{5}\,LC \end{cases}$$

entonces, vamos a distinguir varios casos:

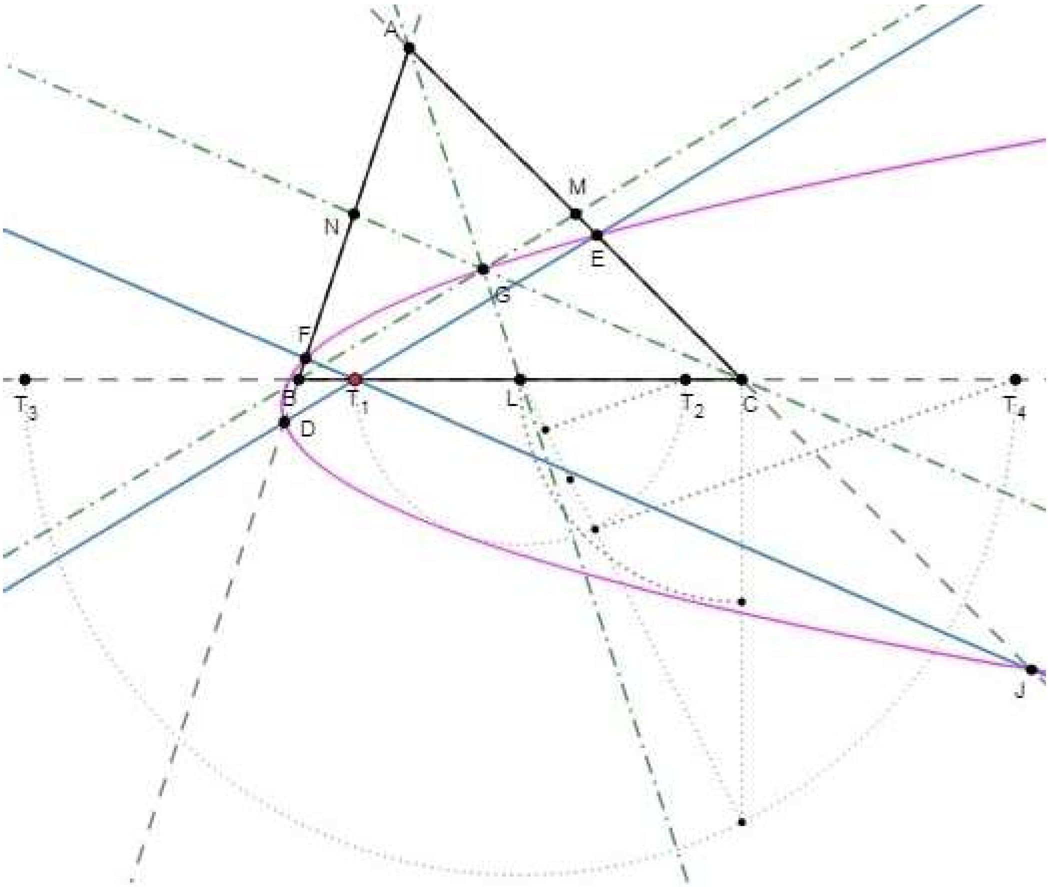
❶ Si $\dfrac{3-\sqrt{5}}{6} < t < \dfrac{3+\sqrt{5}}{6}$, es decir, si el punto T está situado en el interior del segmento T_1T_2, esta cónica es una elipse.

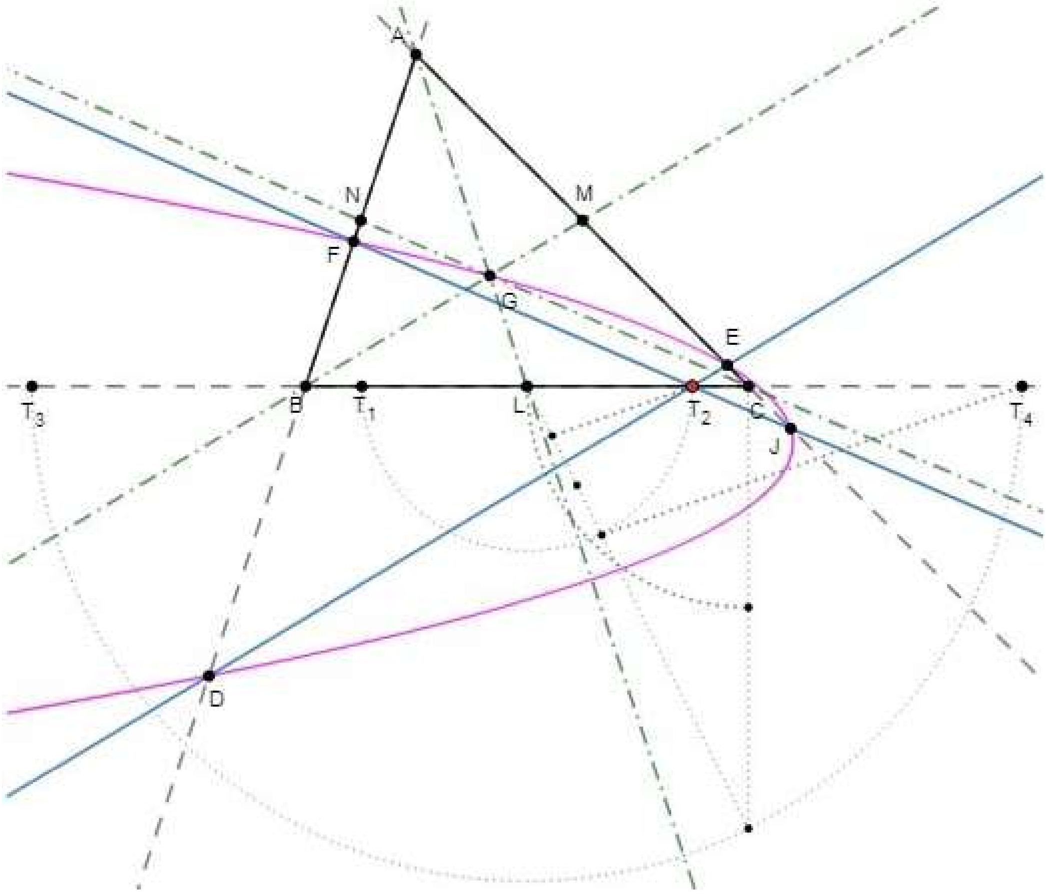


❷ Si $t = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{6}$, es decir, si $T = T_1$ ó $T = T_2$, las cónicas correspondientes son sendas parábolas, cuyos ejes son paralelos a la recta BC.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

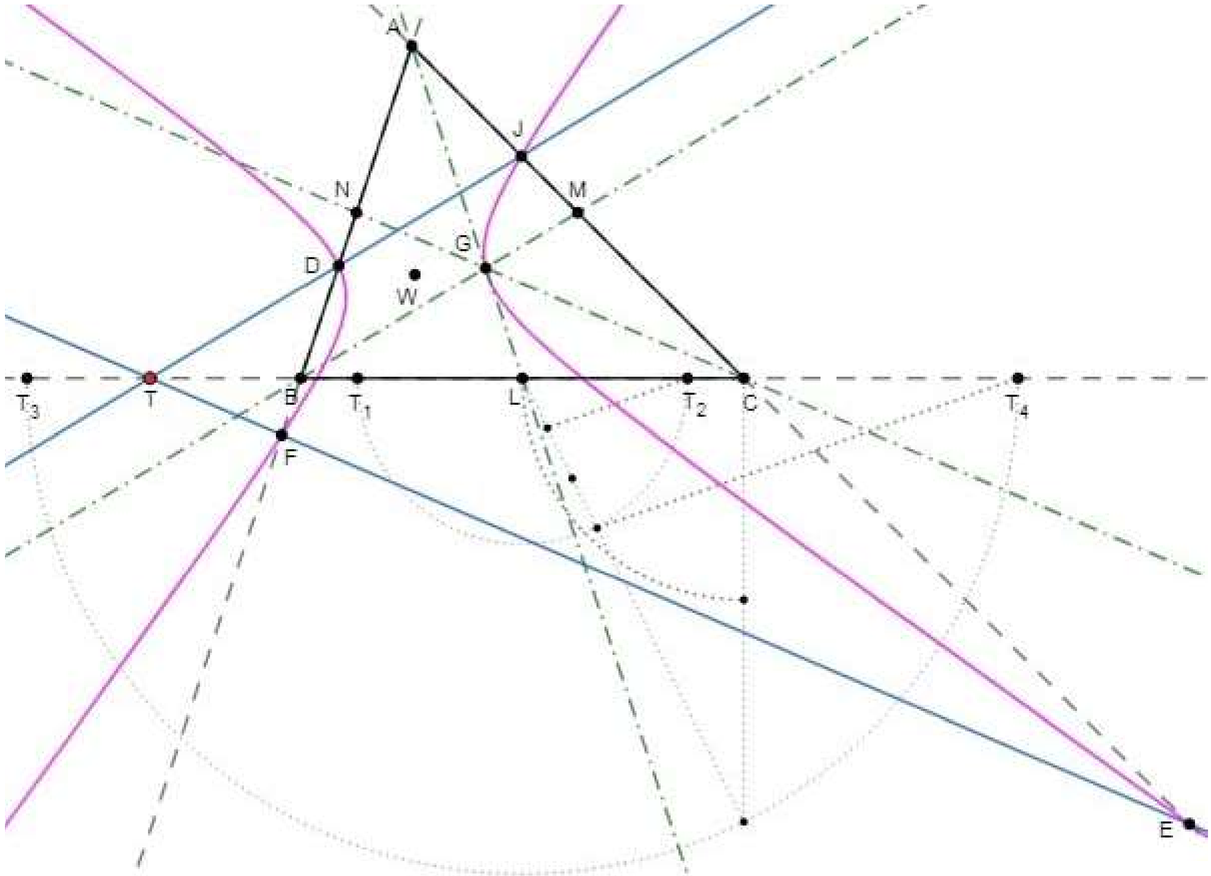




Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

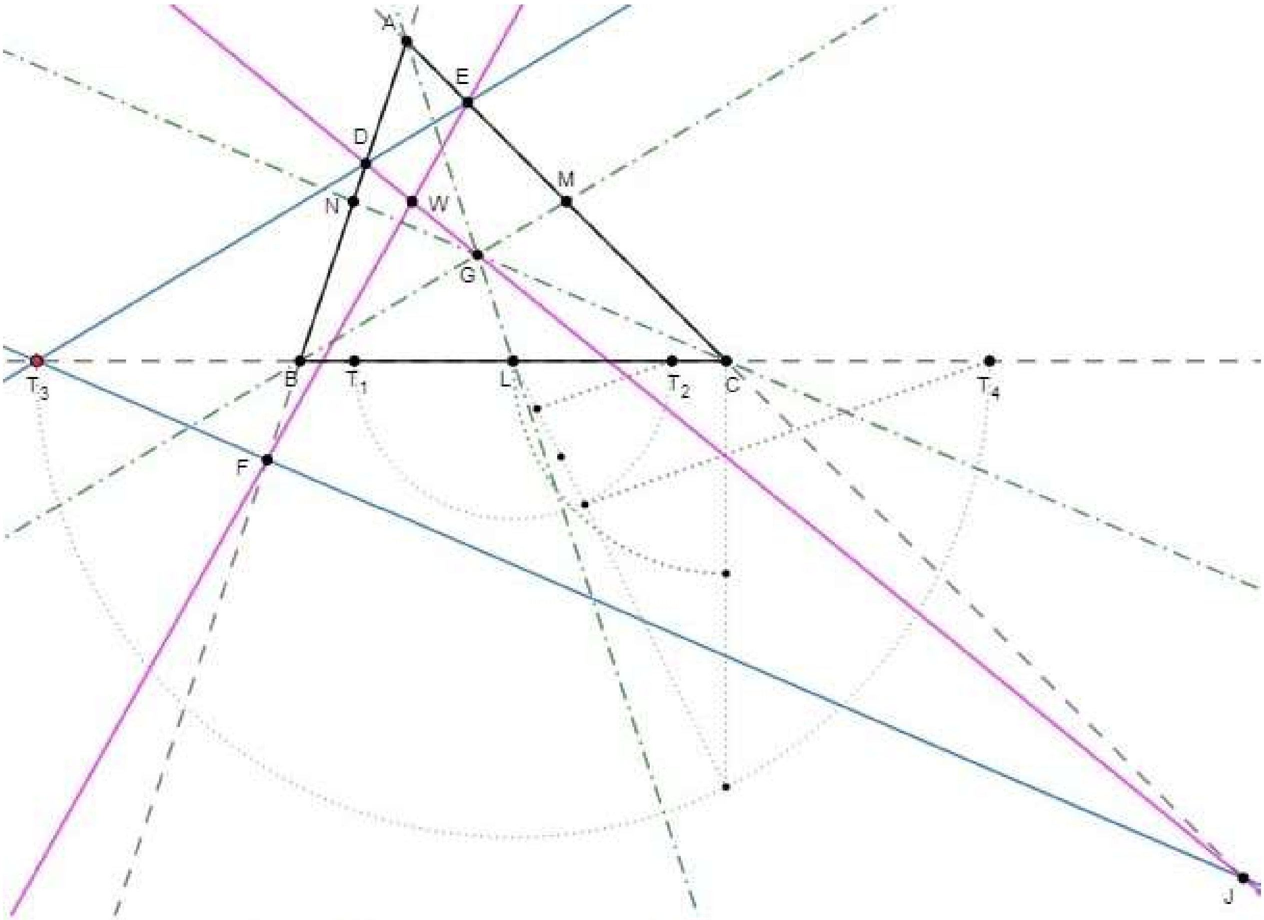
❸ Si $t < \frac{3-\sqrt{5}}{6}$ ó $t > \frac{3+\sqrt{5}}{6}$ y $t \notin \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 0, 1\right\}$, es decir, si el punto T está situado en el exterior del segmento T_1T_2 y $T \notin \{T_3, T_4, B, C\}$, esta cónica es una hipérbola.

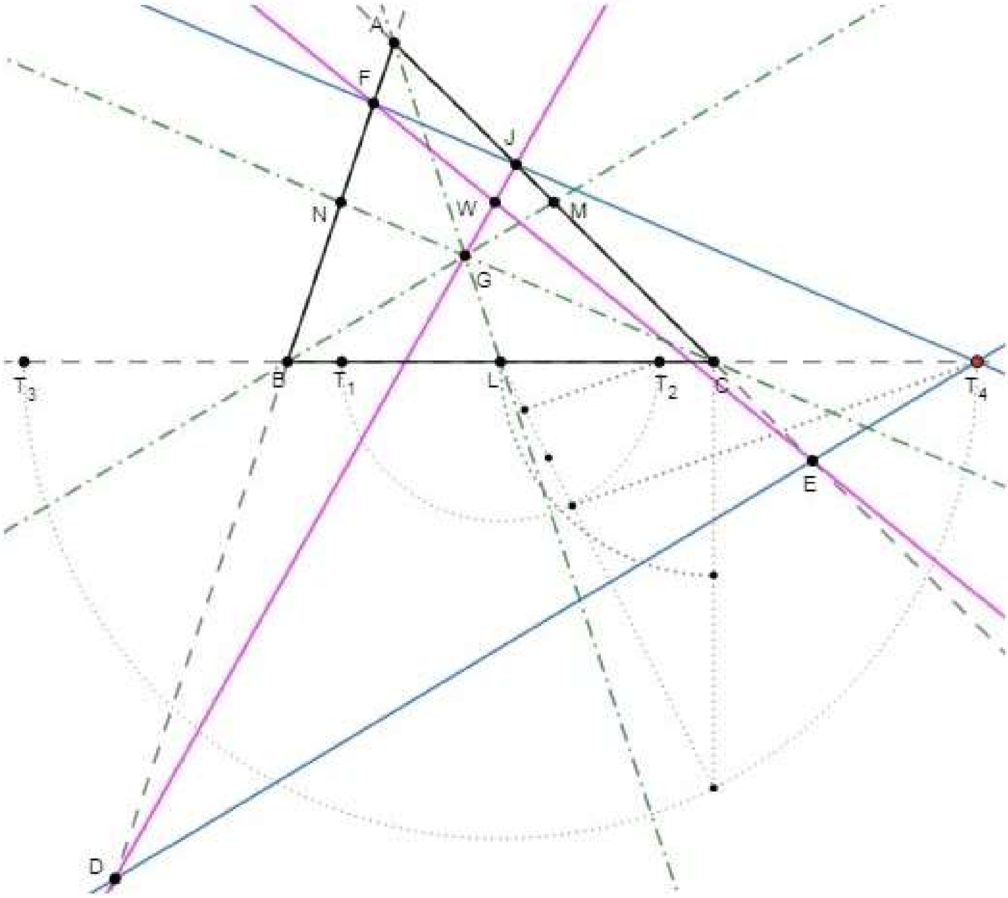


❻ Si $t \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 0, 1\right\}$, es decir, si $T \in \{T_3, T_4, B, C\}$, esta cónica es un par de rectas.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021





Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

28053