

# TRIÁNGULOS CABRI

## 16 a 30 de Noviembre de 2021

**Problema 1024-B.** (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo  $ABC$  con triángulo medial  $LMN$ , se consideran un punto  $T$  situado sobre la recta  $BC$ , la recta  $T_y$  paralela a  $CN$  pasando por  $T$  y la recta  $T_z$  paralela a  $BM$  pasando por  $T$ . Determinar y representar gráficamente la envolvente de las rectas  $EF$  cuando el punto  $T$  recorre la recta  $BC$ , siendo:

$$\begin{cases} E = T_y \cap AC \\ F = T_z \cap AB \end{cases}$$

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo  $ABC$ , si  $T = (0 : 1 - t : t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), como:

$$\begin{cases} N = (1 : 1 : 0) \\ M = (1 : 0 : 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CN_\infty = (1 : 1 : -2) \\ BM_\infty = (1 : -2 : 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_y \equiv 0 = (2 - t)x - ty + (1 - t)z \\ T_z \equiv 0 = (1 + t)x + ty - (1 - t)z \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} E = T_y \cap AC = (1 - t : 0 : t - 2) \\ F = T_z \cap AB = (-t : 1 + t : 0) \end{cases} \Rightarrow EF \equiv (2 + t - t^2)x + t(2 - t)y + (1 - t^2)z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro  $t$  del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a  $t$ :

$$\begin{cases} 0 = (2 + t - t^2)x + t(2 - t)y + (1 - t^2)z \\ 0 = (1 - 2t)x + 2(1 - t)y - 2tz \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando  $t$  en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$9x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12xy + 12xz + 4yz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 9x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12xy + 12xz + 4yz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow AL_\infty = (2 : -1 : -1)$$

siendo sus diámetros paralelos a la mediana correspondiente al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ . Además:

- ① Esta parábola corta a la recta  $AC$ , cuya ecuación es  $y = 0$ , únicamente en el punto  $P = (-2 : 0 : 3)$ , tal que  $AP = 3AC$ , por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la recta  $AC$  no es un diámetro de la parábola).

**Miguel-Ángel Pérez García-Ortega**

# TRIÁNGULOS CABRI

## 16 a 30 de Noviembre de 2021

- ② Esta parábola corta a la recta  $AB$ , cuya ecuación es  $z = 0$ , únicamente en el punto  $Q = (-2 : 3 : 0)$ , tal que  $AQ = 3AB$ , por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la recta  $AB$  no es un diámetro de la parábola).
- ③ Si  $r_p$  y  $r_q$  son los rayos paralelos al eje de la parábola (es decir, paralelos a la mediana correspondiente al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ ) que inciden en ella en los puntos  $P$  y  $Q$ , respectivamente, la reflexión  $rf_p$  de  $r_p$  sobre la recta  $n_p$  normal a la parábola en el punto  $P$  y la reflexión  $rf_q$  de  $r_q$  sobre la recta  $n_q$  normal a la parábola en el punto  $Q$  se cortan en el foco de la parábola, siendo el eje de ésta la recta paralela a la mediana correspondiente al vértice  $A$  del triángulo  $ABC$  pasando por el foco.
- ④ Como cualquier punto de la parábola equidista de su foco y de su directriz y las circunferencias  $(P, P_{\text{foco}})$  y  $(Q, Q_{\text{foco}})$  cortan a los rayos  $r_p$  y  $r_q$  en los puntos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, resulta que la directriz es la recta  $XY$ .
- ⑤ Finalmente, una vez construídos el foco y la directriz de la parábola, podemos construir ésta.

