TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

Problema 1024-C. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con triángulo medial LMN, se consideran un punto T situado sobre la recta BC, la recta T_y paralela a CN pasando por T y la recta T_z paralela a BM pasando por T. Determinar y representar graficamente la envolvente de las rectas DJ cuando el punto T recorre la recta BC, siendo:

$$\begin{cases} D = T_y \cap AB \\ J = T_z \cap AC \end{cases}$$

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $T = (0 : 1 - t : t)$ $(t \in \mathbb{R})$, como:

$$\begin{cases} N = (1 : 1 : 0) \\ M = (1 : 0 : 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CN_\infty = (1 : 1 : -2) \\ BM_\infty = (1 : -2 : 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_y \equiv 0 = (2-t)x - ty + (1-t)z \\ T_z \equiv 0 = (1+t)x + ty - (1-t)z \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} D = T_y \cap AB = (t : 2 - t : 0) \\ J = T_z \cap AC = (1 - t : 0 : 1 + t) \end{cases} \Rightarrow DJ \equiv (2 + t - t^2)x - t(1+t)y - (2 - 3t + t^2)z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t:

$$\begin{cases} 0 = (2 + t - t^2)x - t(1+t)y - (2 - 3t + t^2)z \\ 0 = (1 - 2t)x - (1 + 2t)y + (3 - 2t)z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$9x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 6xz - 14yz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -576 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 9x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 6xz - 14yz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow AL_\infty = (2 : -1 : -1)$$

siendo sus diámetros paralelos a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC. Además:

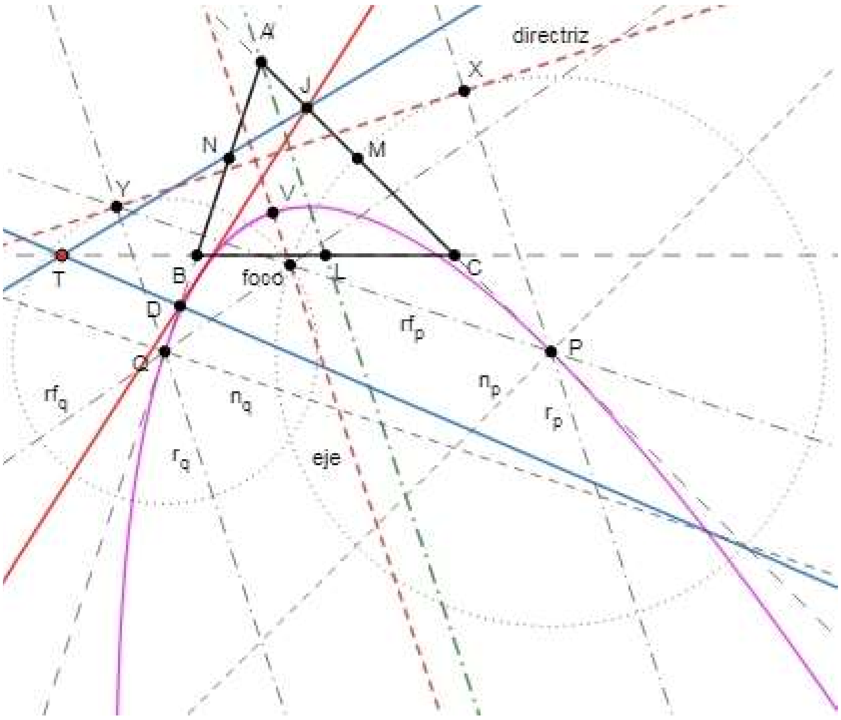
① Esta parabola corta a la recta AC, cuya ecuación es $y = 0$, únicamente en el punto simétrico $P = (-1 : 0 : 3)$ del punto M con respecto al punto C, por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la recta AC no es un diámetro de la parábola).

② Esta parabola corta a la recta AB, cuya ecuación es $z = 0$, únicamente en el punto simétrico $Q = (-1 : 3 : 0)$ del punto N con respecto al punto B, por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la recta AB no es un diámetro de la parábola).

③ Si r_p y r_q son los rayos paralelos al eje de la parábola (es decir, paralelos a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC) que inciden en ella en los puntos P y Q, respectivamente, la reflexión rf_p de r_p sobre la recta n_p normal a la parábola en el punto P y la reflexión rf_q de r_q sobre la recta n_q normal a la parábola en el punto Q se cortan en el foco de la parábola, siendo el eje de ésta la recta paralela a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC pasando por el foco.

④ Como cualquier punto de la parábola equidista de su foco y de su directriz y las circunferencias $(P, P\text{foco})$ y $(Q, Q\text{foco})$ cortan a los rayos r_p y r_q en los puntos X e Y, respectivamente, resulta que la directriz es la recta XY.

⑤ Finalmente, una vez construídos el foco y la directriz de la parábola, podemos construir ésta.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega