TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021

<u>Problema 1025.</u> (Thales, Revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas (6), 1986) Dado un triángulo ABC, sean B' un punto del lado AB distinto de A y de B, C' el punto de intersección con AC de la recta paralela a BC pasando por B', γ la circunferencia con centro B que pasa por C, γ' la circunferencia con centro B' que pasa por C' y D el segundo punto de intersección entre γ' y AC. Si l es la recta tangente a γ en C y l' es la recta tangente a γ' en C', probar que:

① Las rectas l y l' son secantes.

② Si $T = l \cap l'$, entonces, el triángulo CTD es isósceles.

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $B = (t : 1-t : 0)$ $(0 \neq t \neq 1)$, como $C' = (t : 0 : 1-t)$, entonces:

$$B'C' = |1-t|a$$

por lo que:

$$\gamma' \equiv c^2xy + b^2xz + a^2yz + \left[(a^2-c^2)(1-t)^2x + (a^2(1-t)^2 - c^2t^2)y - t(b^2 + (a^2-c^2)(1-t))z\right](x+y+z) = 0$$

luego:

$$D = \gamma' \cap AC = (b^2 + (a^2-c^2)(1-t) : 0 : -(a^2-c^2)(1-t))$$

Además, como:

$$\gamma \equiv c^2xy + b^2xz + a^2yz + [(a^2-c^2)x + a^2y](x+y+z) = 0$$

entonces:

$$\begin{cases} l \equiv 0 = (a^2+b^2-c^2)x + 2a^2y \\ l' \equiv 0 = (a^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(1-t)x + (2a^2b^2 - a^4t - a^2b^2t + 2a^2c^2t + b^2c^2t - c^4t)y + (a^2+b^2-c^2)[b^2 + (a^2-c^2)(1-t)] \end{cases}$$

por lo que:

$$T = l \cap l' = (2a^2(b^2 + (a^2-c^2)(1-t)) : (a^2+b^2-c^2)(b^2 + (a^2-c^2)(1-t)) : -2a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + a^4t - a^2b^2t + b^2c^2t - c^4t)$$

siendo el "peso" de este punto:

$$(2a^2(b^2 + (a^2-c^2)(1-t)) + (a^2+b^2-c^2)(b^2 + (a^2-c^2)(1-t)) - 2a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + a^4t - a^2b^2t + b^2c^2t - c^4t) = 4S^2 > 0$$

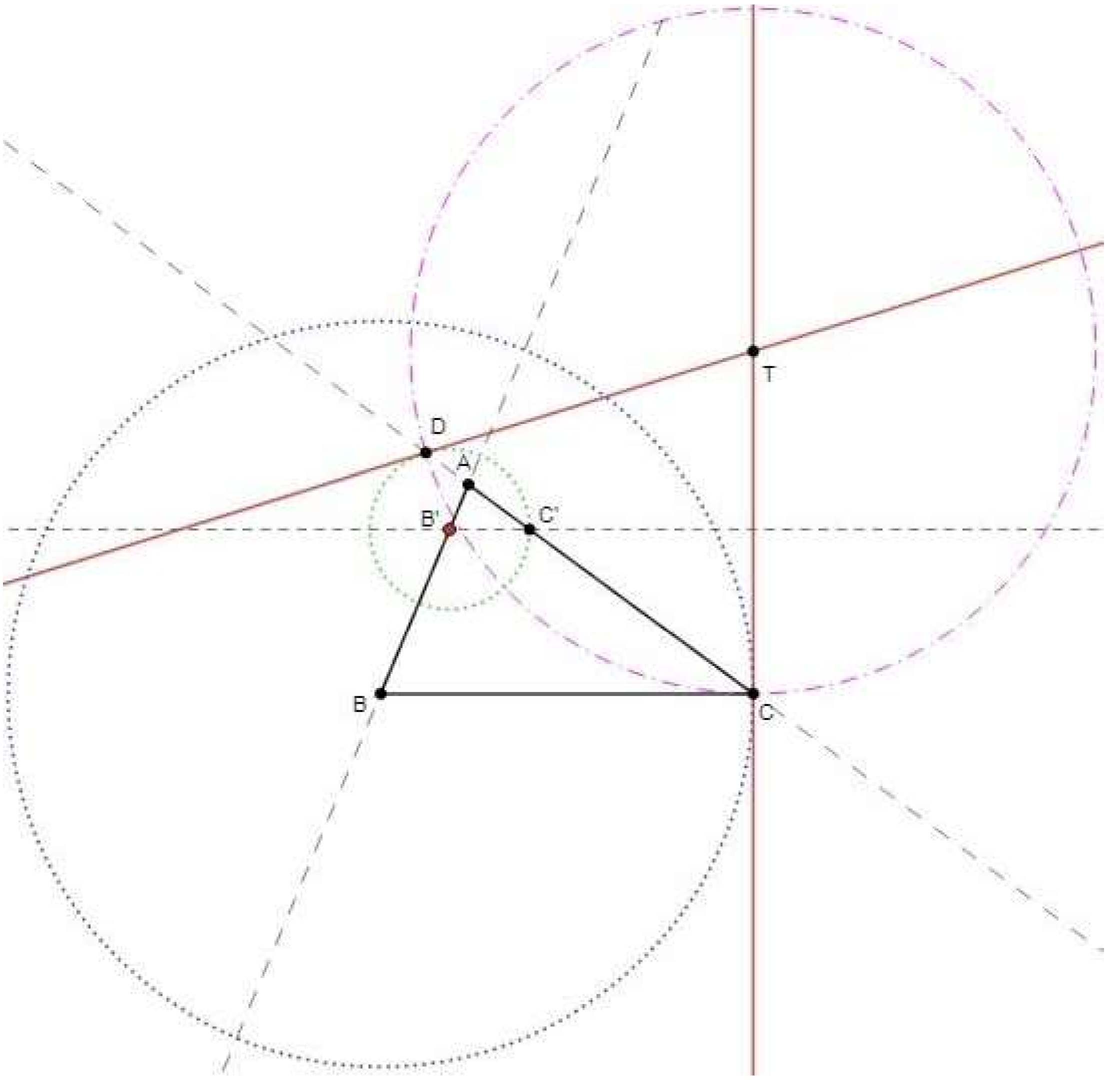
lo cual significa que este punto no está situado en la recta del infinito y, por tanto, las rectas l y l' son secantes. Finalmente, como:

$$\begin{cases} CT^2 = \dfrac{a^2[b^2 + (a^2-c^2)(1-t)]^2}{4S^2} \\ DT^2 = \dfrac{a^2[b^2 + (a^2-c^2)(1-t)]^2}{4S^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CT = \dfrac{a|b^2 + (a^2-c^2)(1-t)|}{2S} \\ DT = \dfrac{a|b^2 + (a^2-c^2)(1-t)|}{2S} \end{cases} \Rightarrow CT = DT$$

resulta que el triángulo CTD es isósceles.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
16 a 30 de Noviembre de 2021



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega