TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de diciembre de 2021

Problema 1028. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC, se consideran el punto medio L del segmento BC y dos puntos P y Q situados en las rectas AB y LC, respectivamente, tales que:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{LQ}{LC}$$

Determinar y representar gráficamente la curva envolvente de las rectas PQ cuando el punto P recorre la recta AB.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P = (1-t : t : 0)$ $(t \in \mathbb{R})$, como $L = (0 : 1 : 1)$, entonces:

$$AL \equiv y - z = 0$$

y la recta paralela a AL pasando por P:

$$tx - (1-t)y + (1+t)z = 0$$

corta a la recta BC en el punto simétrico $Q' = (0 : 1+t : 1-t)$ del punto Q con respecto al punto L, por lo que $Q = (0 : 1-t : 1+t)$ y, por tanto:

$$PQ \equiv t(1+t)x - (1-t)(1+t)y + (1-t)^2 z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = t(1+t)x - (1-t)(1+t)y + (1-t)^2 z \\ 0 = (1+2t)x + 2ty - 2(1-t)z \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$x^2 + 4y^2 + 4xy - 8xz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -64 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = x^2 + 4y^2 + 4xy - 8xz \\ 0 = x + y + z \end{array}\right. \Rightarrow BU_\infty = (2 : -3 : 1)$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

siendo sus diámetros paralelos a la recta de ecuación $x - 2z = 0$, que pasa por el punto B y por el punto $U = (2 : 0 : 1)$, situado en el segmento AC y tal que $AU : AC = 1 : 3$. Además:

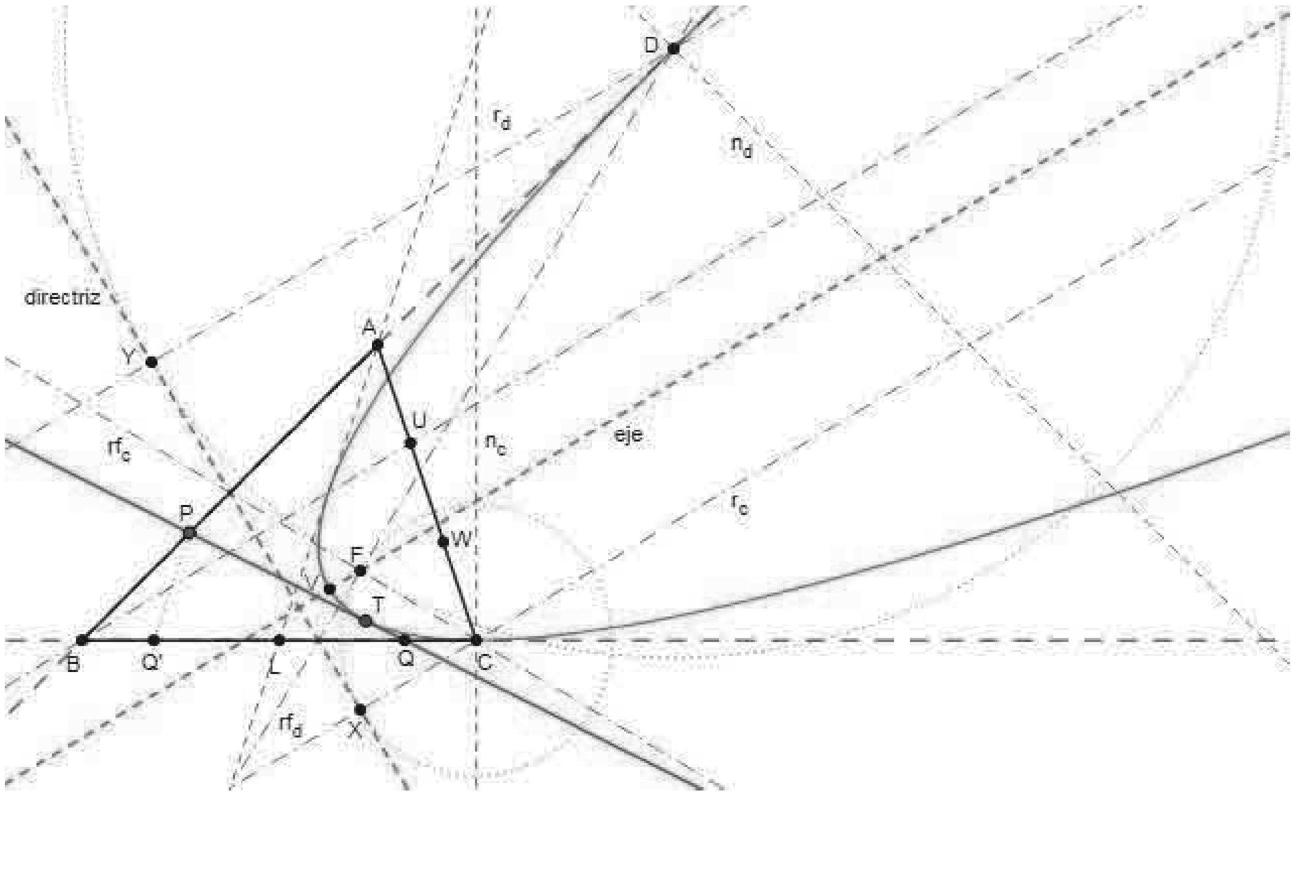
① Esta parábola corta a la recta BC, cuya ecuación es $x = 0$, únicamente en el punto $C = (0 : 0 : 1)$, por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la recta BC no es un diámetro de la parábola).

② Esta parábola corta a la recta AB, cuya ecuación es $z = 0$, en el punto simétrico $D = (2 : -1 : 0)$ del punto $B = (0 : 1 : 0)$ con respecto al punto $A = (1 : 0 : 0)$, por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la mediana AB no es un diámetro de la parábola).

③ Si r_c y r_d son los rayos paralelos al eje de la parábola (es decir, paralelos a la recta BU) que inciden en ella en los puntos C y D, respectivamente, la reflexión rf_c de r_c sobre la recta n_c normal a la parábola en el punto C y la reflexión rf_d de r_d sobre la recta n_d normal a la parábola en el punto D se cortan en el foco F de la parábola, siendo el eje de ésta la recta paralela a BU pasando por F.

④ Como cualquier punto de la parábola equidista de su foco y de su directriz y las circunferencias (C, CF) y (D, DF) cortan a los rayos r_c y r_d en los puntos X e Y, respectivamente, resulta que la directriz es la recta XY.

⑤ Finalmente, una vez construídos el foco y la directriz de la parábola, podemos construir ésta.



Miguel-Ángel Pérez García Ortega