

TRIÁNGULOS CABRI

1 al 15 de diciembre de 2021

Problema 1029. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con incentro I , se consideran dos puntos P y Q situados en las rectas BI e IC , respectivamente, tales que:

$$\frac{BP}{BI} = \frac{IQ}{IC}$$

Determinar y representar gráficamente la curva envolvente de las rectas PQ cuando el punto P recorre la recta BI .

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como $I = (a : b : c)$, si :

$$P = (1-t)(0 : a+b+c : 0) + t(a : b : c) = (at : (a+c)(1-t) + b : ct) \quad (t \in \mathbb{R})$$

la recta paralela a BC pasando por P :

$$[a(1-t) + b + c]x - aty - atz = 0$$

corta a la recta CI , cuya ecuación es $bx - ay = 0$, en el punto simétrico $Q' = (at : bt : (a+b)(1-t) + c)$ del punto Q con respecto al punto medio $M = (a : b : a+b+2c)$ del segmento IC , por lo que $Q = (a(1-t) : b(1-t) : (a+b)t + c)$ y, por tanto:

$$PQ \equiv [at(1-t) + bt + c(1-t)]x - at^2y - a(1-t)^2z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t :

$$\begin{cases} 0 = [at(1-t) + bt + c(1-t)]x - at^2y - a(1-t)^2z \\ 0 = [a(1-2t) + b - c]x - 2aty + 2a(1-t)z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$[a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac - bc)]x^2 + 4acxy + 4abxz - 4a^2yz = 0$$

que es una parábola, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac - bc) & 2ac & 2ab \\ 2ac & 0 & -2a^2 \\ 2ab & -2a^2 & 0 \end{vmatrix} = -4a^4(a + b + c)^2 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = [a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac - bc)]x^2 + 4acxy + 4abxz - 4a^2yz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow AD_{\infty} = (-2a : a - b + c : a + b - c)$$

TRIÁNGULOS CABRI

1 al 15 de diciembre de 2021

siendo sus diámetros paralelos a la ceviana correspondiente al vértice A del punto de Nagel del triángulo ABC , que corta a la recta BC en el punto de contacto con ésta de la correspondiente circunferencia exinscrita. Además:

- ① Esta parábola corta a la bisectriz BI , cuya ecuación es $cx - az = 0$, únicamente en el punto $B = (0 : 1 : 0)$, por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la bisectriz BI no es un diámetro de la parábola).
- ② Esta parábola corta a la bisectriz CI , cuya ecuación es $bx - ay = 0$, únicamente en el punto $C = (0 : 0 : 1)$, por lo que es tangente a dicha recta en este punto (ya que la bisectriz CI no es un diámetro de la parábola).
- ③ Si r_b y r_c son los rayos paralelos al eje de la parábola (es decir, paralelos a la recta AD) que inciden en ella en los puntos B y C , respectivamente, la reflexión rf_b de r_b sobre la recta n_b normal a la parábola en el punto B y la reflexión rf_c de r_c sobre la recta n_c normal a la parábola en el punto C se cortan en el foco F de la parábola, siendo el eje de ésta la recta paralela a AD pasando por F .
- ④ Como cualquier punto de la parábola equidista de su foco y de su directriz y las circunferencias (B, BF) y (C, CF) cortan a los rayos r_b y r_c en los puntos X e Y , respectivamente, resulta que la directriz es la recta XY .
- ⑤ Finalmente, una vez construídos el foco y la directriz de la parábola, podemos construir ésta.

