

TRIÁNGULOS CABRI

1 al 15 de diciembre de 2021

Problema 1031. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con triángulo medial LMN , se consideran el punto medio Q del segmento AL y dos puntos P y P' situados sobre la mediana AL y simétricos uno del otro respecto del punto Q . A continuación, se considera la cónica que pasa por los puntos A, D, E, F y Q , siendo:

$$\begin{cases} D = BP \cap CP' \\ E = BP \cap AC \\ F = CP' \cap AB \end{cases}$$

- ① Determinar y representar gráficamente el lugar geométrico que describe el centro de esta cónica cuando el punto P recorre la recta AL .
- ② Clasificar dicha cónica, en función de la posición que ocupa el punto P en la recta AL .
- ③ Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $P = (2(1-t) : t : t)$ ($t \in \mathbb{R}$), como:

$$L = (0 : 1 : 1) \Rightarrow Q = (2 : 1 : 1)$$

entonces, $P' = (2t : 1-t : 1-t)$, por lo que:

$$\begin{cases} BP \equiv 0 = tx - 2(1-t)z \\ CP' \equiv 0 = (1-t)x - 2tz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = (2t(1-t) : (1-t)^2 : t^2) \\ E = (2(1-t) : 0 : t) \\ F = (2t : 1-t : 0) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por los puntos A, D, E, F y Q :

$$2ty^2 + 2(1-t)z^2 - (1-t)xy - txz = 0$$

que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-t & t \\ 1-t & 4t & 0 \\ t & 0 & 4(1-t) \end{vmatrix} = -4(1-3t+3t^2) \neq 0$$

y tiene por centro (conjugado de la recta del infinito) al punto:

$$W = (4(1+2t-2t^2) : 4-7t+2t^2 : -1+3t+2t^2)$$

Eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 4(1+2t-2t^2)\theta \\ y = (4-7t+2t^2)\theta \\ z = (-1+3t+2t^2)\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}^*)$$

resulta que el punto W está situado sobre la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4y^2 - 4z^2 - xy - xz - 16yz = 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

1 al 15 de diciembre de 2021

que es una hipérbola con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $V = (22 : -3 : -3)$, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -8 & -16 \\ -1 & -16 & -8 \end{vmatrix} = -400 \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta = 32 > 0$. Además:

- ☺ Esta hipérbola corta a la mediana AL , cuya ecuación es $y - z = 0$, en los puntos $X = (4 : -1 : -1)$ y $X' = (6 : 1 : 1)$, simétricos uno del otro respecto del punto V , siendo X el punto simétrico del punto L respecto del punto A y el punto X' el punto medio del segmento AQ .
- ☺ Esta hipérbola corta a la mediana BM , cuya ecuación es $y - z = 0$, en el punto $Y = (-1 : 4 : -1)$ (y en otro punto), siendo Y el punto simétrico del punto M respecto del punto B . Por tanto, también esta hipérbola también pasa por el punto Y' simétrico del punto Y respecto del punto V .
- ☹ Esta hipérbola corta a la mediana CN , cuya ecuación es $x - y = 0$, en el punto $Z = (-1 : -1 : 4)$ (y en otro punto), siendo Z el punto simétrico del punto N respecto del punto C . Por tanto, también esta hipérbola también pasa por el punto Z' simétrico del punto Z respecto del punto V .

② Como el discriminante de esta cónica es:

$$\Delta = \frac{-7 - 4t + 4t^2}{4}$$

vamos a distinguir tres casos:

- ① Si $t = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$, como $\Delta = 0$, entonces, tenemos dos parábolas, obtenidas cuando el punto P está situado sobre alguno de los puntos:

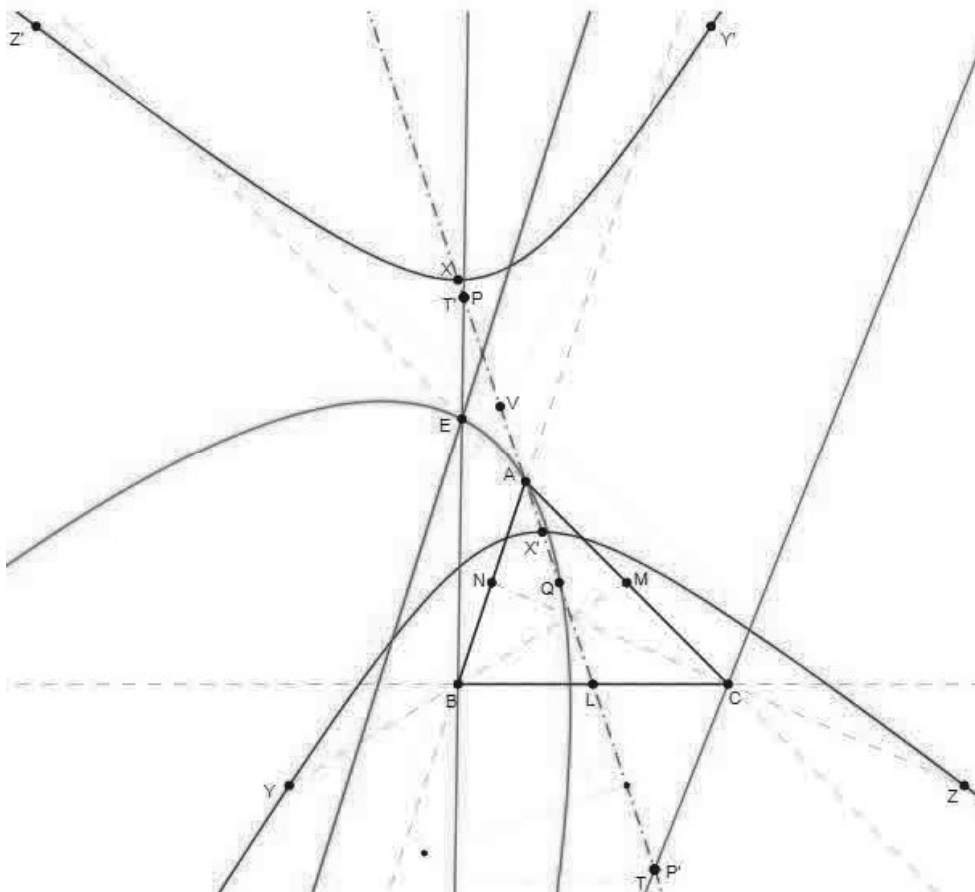
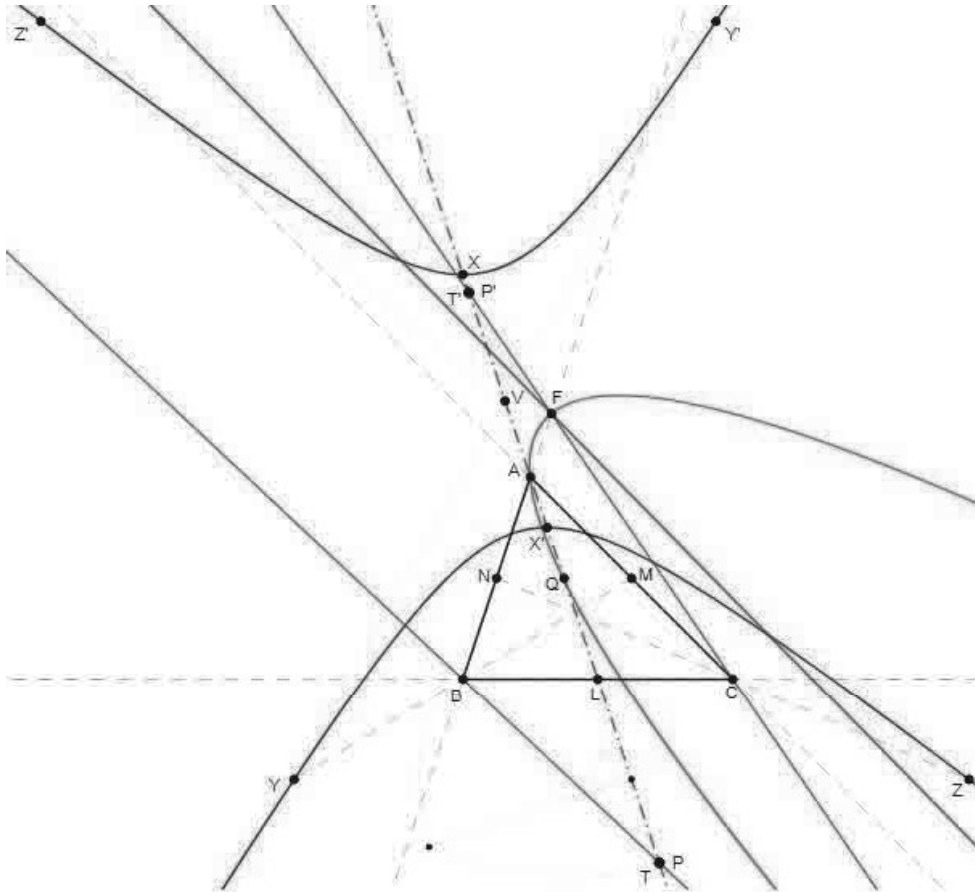
$$\begin{cases} T = (2(1 - 2\sqrt{2}) : 1 + 2\sqrt{2} : 1 + 2\sqrt{2}) \\ T' = (2(1 + 2\sqrt{2}) : 1 - 2\sqrt{2} : 1 - 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

simétricos uno del otro respecto del punto Q y tales que:

$$QT^2 = \frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{2} = 2\left(\frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{4}\right) = 2AL^2 \Rightarrow QT = \sqrt{2} AL$$

Además, como los centros (puntos del infinito) de estas dos parábolas están situados sobre la hipérbola descrita en el apartado anterior, entonces, los diámetros de una de estas parábolas son paralelos a una de las asíntotas de dicha hipérbola y los diámetros de la otra parábola son paralelos a la otra asíntota de dicha hipérbola.

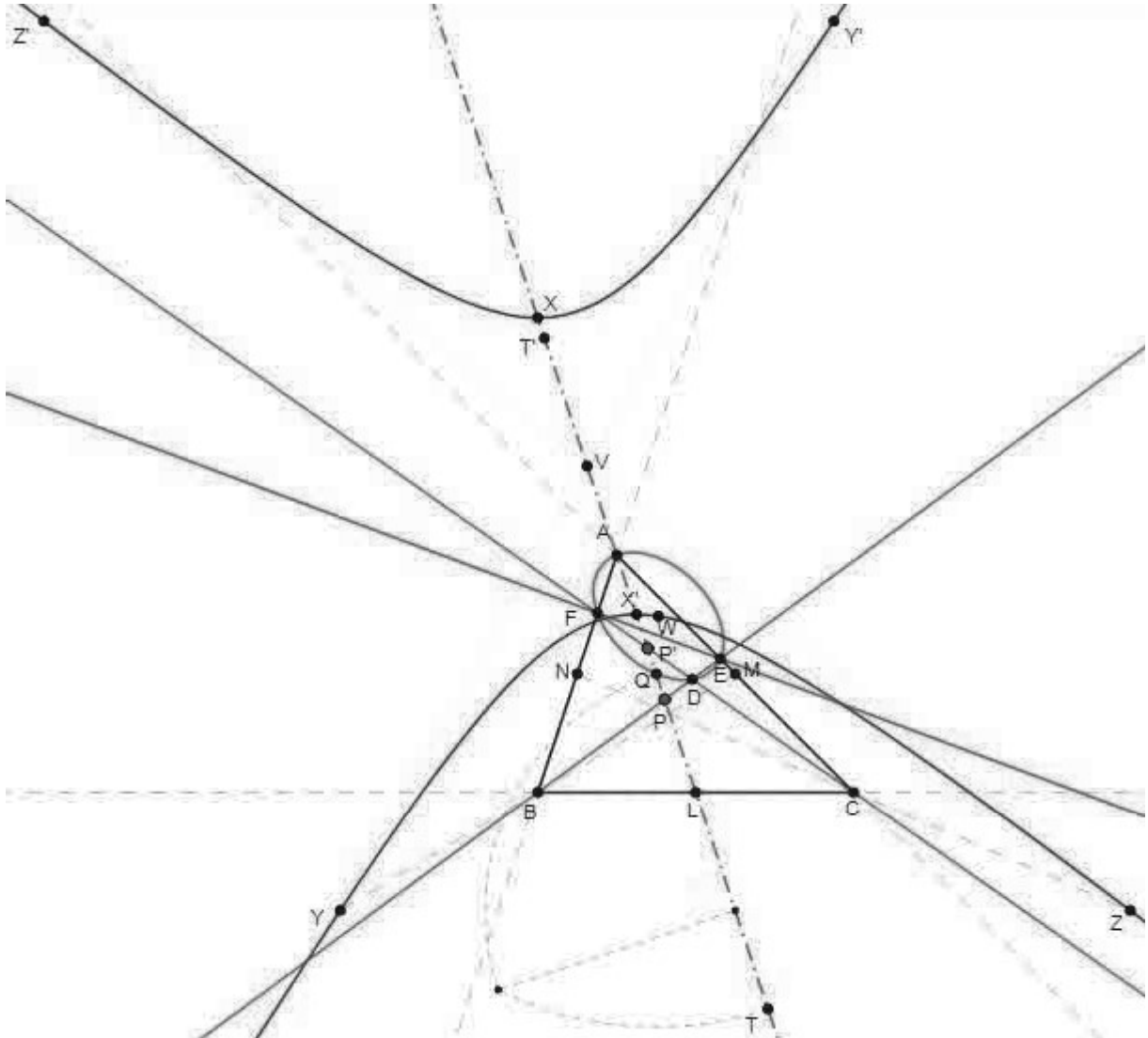
TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de diciembre de 2021



Miguel-Ángel Pérez García Ortega

1 al 15 de diciembre de 2021

2 Si $\frac{1}{2} - \sqrt{2} < t < \frac{1}{2} + \sqrt{2}$, como $\Delta < 0$, entonces, tenemos una familia de elipses, obtenidas cuando el punto P está situado en el interior del segmento TT' .



③ Si $t < \frac{1}{2} - \sqrt{2}$ ó $t > \frac{1}{2} + \sqrt{2}$, como $\Delta > 0$, entonces, tenemos una familia de hipérbolas, obtenidas cuando el punto P está situado en el exterior del segmento TT' .

TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de diciembre de 2021

