

TRIÁNGULOS CABRI

16 de enero de 2022 a 31 de enero de 2022

Problema 1033. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega)

- ① Dado un triángulo ABC con puntos de Brocard Ω_1 y Ω_2 , probar que:
- ❶ El punto medio M del segmento $\Omega_1\Omega_2$ está situado sobre la recta de Euler del triángulo ABC si y sólo si dicho triángulo es isósceles.
 - ❷ El punto medio M del segmento $\Omega_1\Omega_2$ nunca está situado sobre la circunferencia de Euler del triángulo ABC .
- ② Fijado un segmento BC , determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que:
- ❶ El tercer punto de Brocard X_{76} del triángulo ABC esté situado sobre la recta mediatriz del segmento BC .
 - ❷ Los puntos de Brocard Ω_1 y Ω_2 del triángulo ABC estén alineados con él e identificar la recta que contiene a los tres puntos.
 - ❸ Los puntos de Brocard Ω_1 y Ω_2 del triángulo ABC verifiquen que $\Omega_1\Omega_2 \perp BC$.

Solución:

①

- ❶ Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como:

$$\begin{cases} \Omega_1 = (a^2c^2 : a^2b^2 : b^2c^2) \\ \Omega_2 = (a^2b^2 : b^2c^2 : a^2c^2) \end{cases} \Rightarrow M = (a^2(b^2 + c^2) : b^2(a^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2))$$

y la ecuación de la recta de Euler del triángulo ABC es:

$$(b^2 - c^2)S_Ax + (c^2 - a^2)S_By + (a^2 - b^2)S_Cz = 0$$

entonces, el punto M está situado sobre dicha recta si y sólo si:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b)(b + c)(c + a)(a - b)(b - c)(c - a) = 0$$

es decir, si y sólo si:

$$\begin{cases} c = b \\ \text{ó} \\ a = c \\ \text{ó} \\ b = a \end{cases}$$

lo cual significa que dicho triángulo es isósceles.

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

16 de enero de 2022 a 31 de enero de 2022

- ② Como la ecuación de la circunferencia de Euler del triángulo ABC es:

$$2(c^2xy + b^2xz + a^2yz) - 2(S_Ax + S_By + S_Cz)(x + y + z) = 0$$

entonces, si el punto M estuviese situado sobre ella, tendríamos que:

$$0 < 4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4) = 0$$

lo cual es imposible. Por tanto, el punto medio M del segmento $\Omega_1\Omega_2$ nunca está situado sobre la circunferencia de Euler del triángulo ABC .

- ② Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , resulta que:

$$\begin{cases} \Omega_1 = (a^2c^2 : a^2b^2 : b^2c^2) \\ \Omega_2 = (a^2b^2 : b^2c^2 : a^2c^2) \end{cases}$$

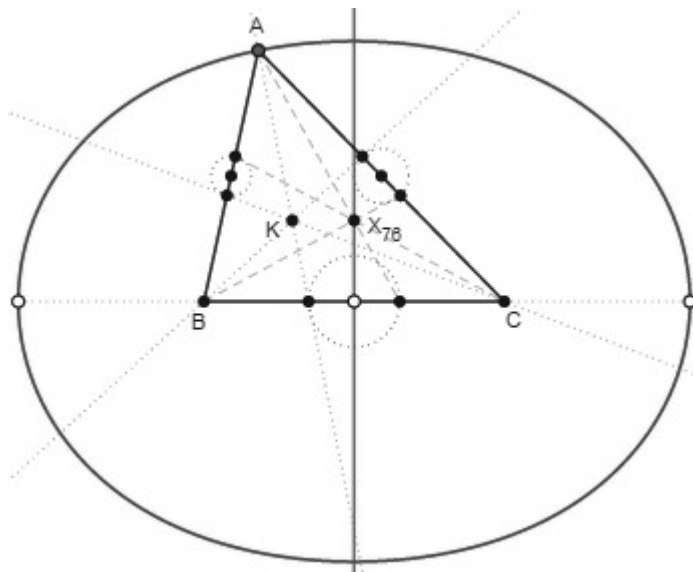
- ① Como la ecuación de la recta mediatriz del segmento BC es:

$$(b^2 - c^2)x + a^2y - a^2z = 0$$

imponiendo que el punto $X_{76} = (b^2c^2 : a^2c^2 : a^2b^2)$ esté situado sobre ella, obtenemos que:

$$(b - c)(b + c)(a^2 - bc)(a^2 + bc) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = c \\ \text{ó} \\ bc = a^2 \end{cases}$$

por lo que el punto A debe estar situado sobre la recta mediatriz del segmento BC o sobre el óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos B y C y cuyo producto de distancias es igual a BC^2 , exceptuando sus dos puntos de intersección con la recta BC , ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.



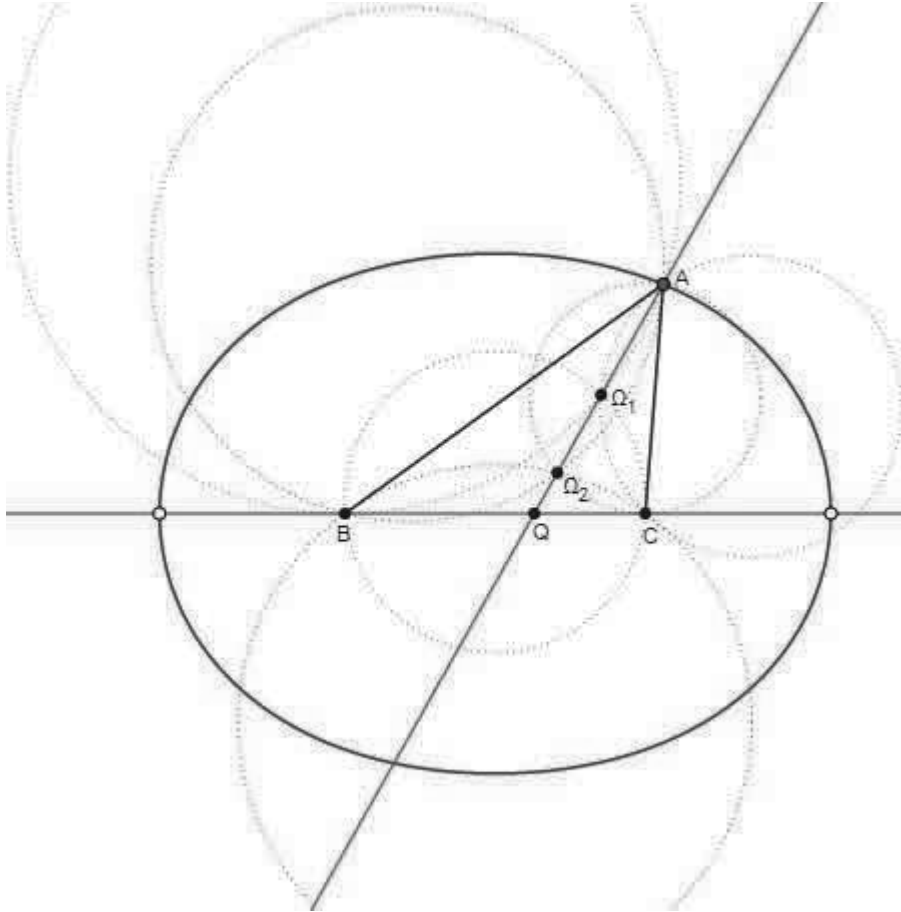
TRIÁNGULOS CABRI

16 de enero de 2022 a 31 de enero de 2022

- ② Estos dos puntos están alineados con el punto A si y sólo si:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 c^2 & a^2 b^2 & b^2 c^2 \\ a^2 b^2 & b^2 c^2 & a^2 c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 b^2 & b^2 c^2 \\ b^2 c^2 & a^2 c^2 \end{vmatrix} = b^2 c^2 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & a^2 \end{vmatrix} = b^2 c^2 (a^2 - bc)(a^2 + bc)$$

es decir, si y sólo si $bc = a^2$, lo cual significa que el punto A debe estar situado sobre el óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos B y C y cuyo producto de distancias es igual a BC^2 , exceptuando sus dos puntos de intersección con la recta BC , ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo. Además, en este caso, como $\Omega_1 = (c^2 : b^2 : bc)$ y $\Omega_2 = (b^2 : bc : c^2)$, entonces, la recta que contiene a los puntos A , Ω_1 y Ω_2 es la bisectriz interior correspondiente al vértice A del triángulo ABC , cuya ecuación es $cy - bz = 0$.



TRIÁNGULOS CABRI

16 de enero de 2022 a 31 de enero de 2022

❸ Como los puntos Ω_1 y Ω_2 tienen el mismo peso, entonces:

$$\Omega_1\Omega_2^\infty = (a^2(c^2 - b^2) : b^2(a^2 - c^2) : c^2(b^2 - a^2))$$

por lo que, al ser $BC^\infty = (0 : 1 : -1)$, se verifica que:

$$\Omega_1\Omega_2 \perp BC \Leftrightarrow 0 = \Omega_1\Omega_2^\infty \cdot BC^\infty = b^2(a^2 - c^2)S_B - c^2(b^2 - a^2)S_C = \frac{a^2[b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)]}{2} \Leftrightarrow b^4 + c^4 = a^2(b^2 + c^2)$$

Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC , si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), como:

$$\begin{cases} C = \left(\frac{a}{2}, 0\right) \\ B = \left(-\frac{a}{2}, 0\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC \\ b = AC = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} \end{cases}$$

entonces:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\left(\frac{a^2}{4}\right)(y^2 - x^2) + \frac{3a^4}{16} = 2\left(\frac{a^2}{4}\right)(y^2 - x^2) + \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{16}$$

por lo que el punto A debe estar situado sobre el óvalo de Cassini cuyos focos son los puntos F_- y F_+ de intersección entre la circunferencia con diámetro BC y la mediatriz de dicho segmento y cuyo producto de distancias es igual a $\frac{BC^2}{2}$ exceptuando sus puntos de intersección con la recta BC , ya que para dichos puntos no tendríamos un triángulo.

