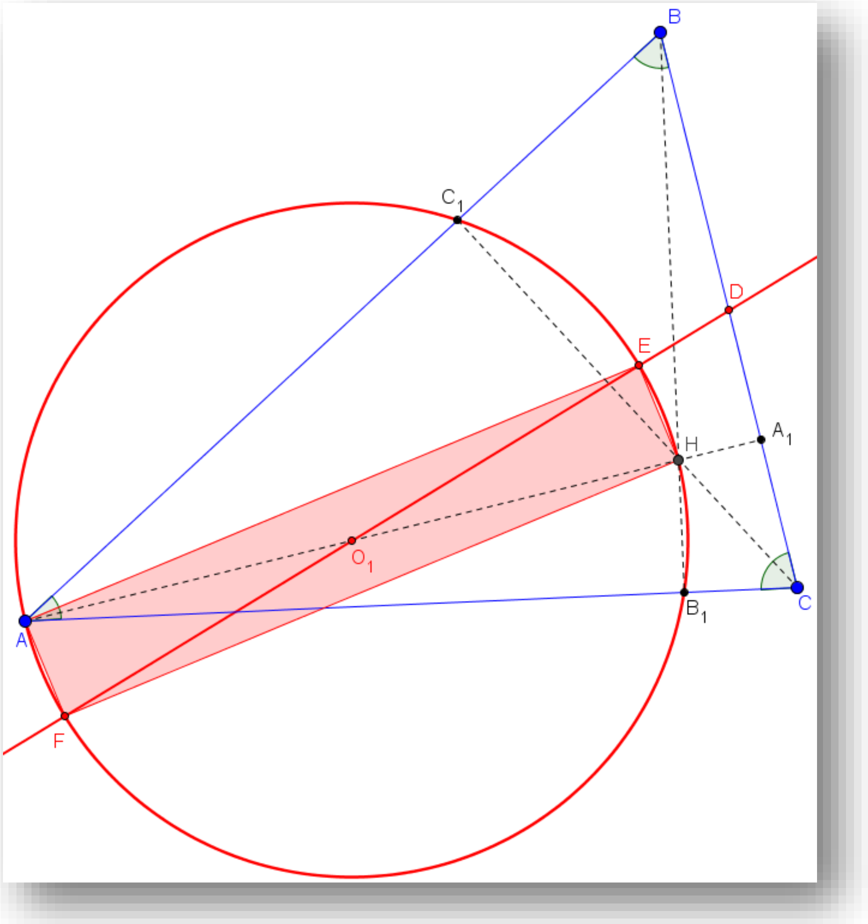
Problema 1034.-
Sea H el ortocentro de un triángulo ABC. Sea D el punto medio de BC. Sea E el punto en la bisectriz de $\measuredangle BAC$ tal que $AE \perp EH$. Sea F el punto tal que AEHF es un rectángulo. Probar que los puntos D, E y F están alineados.

Mathematical Excalibur, Vol. 22, No. 2, Nov. 18 – Jan. 19, pag.3

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros. Córdoba.



Sean $A_1, B_1 y\ C_1$, los pies de las alturas $h_a, h_b y\ h_c$, respectivamente. Asimismo sea O_1 el centro de la circunferencia que circunscribe al rectángulo $AEHF$.
De la construcción realizada se observan los siguientes hechos de interés:

$$\measuredangle EO_1H = 2 \cdot \measuredangle EAH = 2 \cdot \frac{1}{2}\measuredangle(C - B) = \measuredangle(C - B)$$

Determinamos las longitudes de los segmentos $\overline{O_1A_1}\ \ y\ \ \overline{A_1D}$.

(*) Hallamos la longitud de $\overline{O_1A_1}$.

$$\overline{O_1A_1} = h_a - \frac{1}{2}\overline{AH} = b \cdot senC - \frac{b - a \cdot cosC}{2senC}$$

(*) Hallamos la longitud de $\overline{A_1D}$.

$$\overline{A_1D} = \frac{1}{2}(a - 2b \cdot cosC)$$

Los puntos $D, E \ y \ F$ están alineados si y sólo si lo están $D, E \ y \ O_1$. Y esto será cierto si y sólo si

$\alpha = \measuredangle DO_1A_1 = \measuredangle EO_1H = \measuredangle(C - B)$ ya que los puntos $A, \ O_1, \ H \ y \ A_1$ sí que están alineados.
Vamos a ver el valor de la tangente del ángulo $\alpha = \measuredangle DO_1A_1$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A_1D}}{\overline{O_1A_1}} = \frac{\frac{1}{2}(a - 2bcosC)}{bsenC - \frac{b - acosC}{2senC}} = \frac{(a - 2bcosC) \cdot senC}{2bsen^2C - b + a\,cosC} = \frac{(a - 2bcosC)bsenC}{2b^2sen^2C - b^2 + abcosC} \ (I)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que, $h_a = b \cdot senC$

$$\tan\measuredangle(C - B) = \frac{tanC - tanB}{1 + tanC \cdot tanB} = \frac{\frac{h_a}{b \cdot cosC} + \frac{h_a}{a - b \cdot cosC}}{1 + \frac{h_a^2}{(a - bcosC)bcosC}} = \frac{bsenC(a - 2bcosC)}{(a - bcosC)bcosC + b^2sen^2C}.$$

$$\tan\measuredangle(C - B) = \frac{bsenC(a - 2bcosC)}{abcosC - b^2cosC + b^2sen^2C} \ (II)$$

De este modo queda probado que $(I) = (II)$.

Puesto que los puntos $A, \ O_1, \ H \ y \ A_1$ están alineados y hemos probado que
$\alpha = \measuredangle DO_1A_1 = \measuredangle EO_1H = \measuredangle(C - B)$ resultará así, que los puntos D, E y F habrán de estar alineados.