TRIÁNGULOS CABRI
16 de enero de 2022 a 31 de enero de 2022

Problema 1034. (Mathematical Excalibur, Vol. 22, nº 2, Noviembre 2018 - Enero 2019, página 3) Dado un triángulo ABC con ortocentro H, se consideran el punto medio D del segmento BC, el punto E situado sobre la bisectriz de $\triangle BAC$ tal que $AE \perp EH$ y el punto F tal que $AEHF$ es un rectángulo. Probar que los puntos D, E y F están alineados.

Solución:

Como el punto E es el segundo punto de intersección entre la circunferencia con diámetro AH y la bisectriz interior correspondiente al vértice A del triángulo ABC, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, resulta que sus coordenadas están determinadas por una de las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

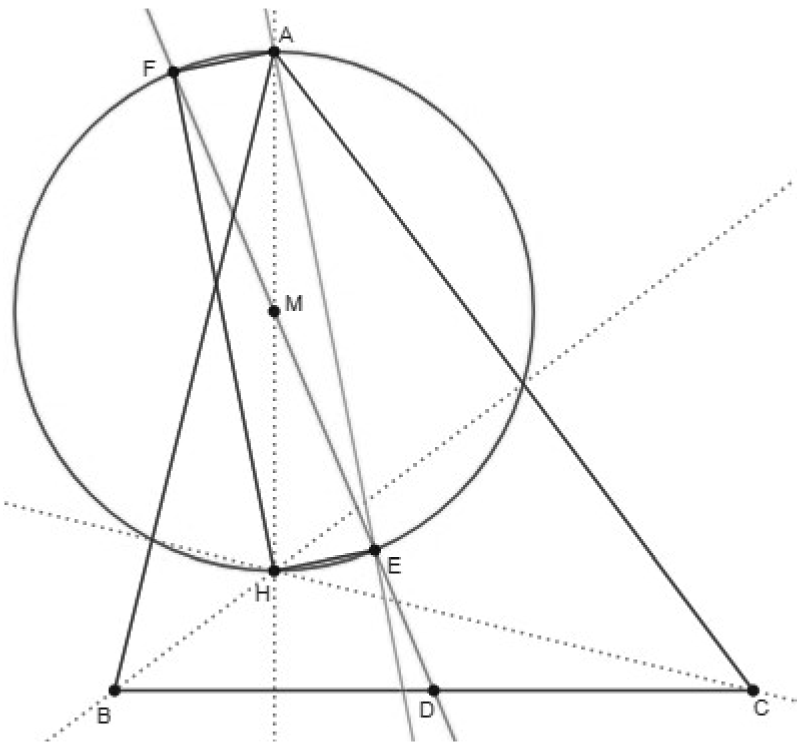
$$\begin{cases} 0 = c^2xy + b^2xz + a^2yz - (S_By + S_Cz)(x+y+z) \\ 0 = cy - bz \end{cases}$$

por lo que:

$$E = ((bc - S_A)(S^2 + S_BS_C) : bS_A(bS_B + cS_C) : cS_A(bS_B + cS_C))$$

(siendo S el doble del área del triángulo ABC). Además, si $AEHF$ es un rectángulo, entonces, el punto F es el punto simétrico del punto E con respecto al punto medio $M = (S^2 + S_BS_C : S_AS_C : S_AS_B)$ del segmento AH, por lo que basta con probar que los puntos D, E y M están alineados, lo cual es cierto, ya que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ (bc - S_A)(S^2 + S_BS_C) & bS_A(bS_B + cS_C) & cS_A(bS_B + cS_C) \\ S^2 + S_BS_C & S_AS_C & S_AS_B \end{vmatrix} = 0$$



Miguel-Ángel Pérez García Ortega