

Problema 1034.- Sean O y H el circuncentro y el ortocentro de un triángulo ABC .

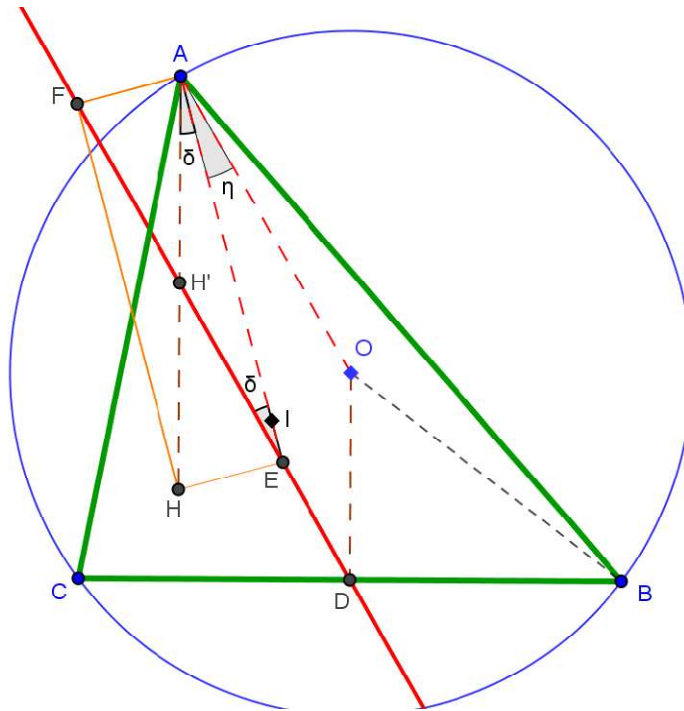
Sea D el punto medio de BC . Sea E el punto en la bisectriz de $\angle BAC$ tal que $AE \perp EH$

Sea F el punto tal que $AEHF$ es un rectángulo. Probar que los puntos D , E y F están alineados.

Mathematical Excalibur, Vol. 22, No. 2, Nov. 18 – Jan. 19, pag.3

https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/v22_n2_20190124.pdf

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea H' el centro del rectángulo $AEHF$. Es el punto medio del segmento AH , una de sus diagonales.

$AH = EF = 2R|\cos A|$ por el t. de los senos aplicado al triángulo AHC .

Y del triángulo rectángulo $\triangle ODB$ obtenemos $OD = AH' = R \cos A$.

La paralela por A a la diagonal EF del rectángulo y la altura AH forman ángulos iguales con la bisectriz AI . Por tanto son conjugadas isogonales: esa paralela es el radio OA de la circunferencia circunscrita al triángulo. Sea D' el punto de corte de la diagonal EF con el lado BC , es decir, $D' = EF \cap BC$.

Tenemos pues que el cuadrilátero $AH'D'O$ es un paralelogramo con $AH' = OD' = OD$ y los tres son perpendiculares a BC , por tanto $D = D'$ y con esto se concluye la alineación de los puntos F, H', E y D como se quería demostrar. ■