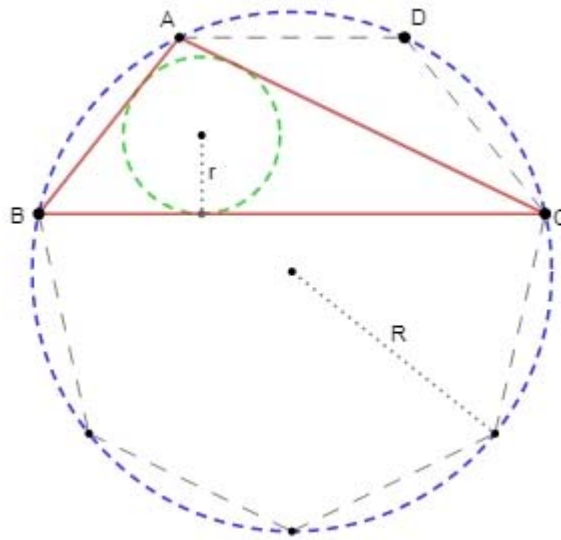


# TRIÁNGULOS CABRI

## 1 al 14 de febrero de 2022

**Problema 1035.** (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo heptagonal con inradio  $r$  y circunradio  $R$ , determinar  $\frac{r}{R}$ , probar que  $\frac{r}{R}$  es algebraico, justificar que  $Q\left(\frac{r}{R}\right)$  es un cuerpo y calcular  $\left(\frac{r}{R}\right)^{-1}$  en  $Q\left(\frac{r}{R}\right)$ .

Solución:



Si  $D$  es el vértice del heptágono regular que contiene al triángulo  $ABC$  tal que el cuadrilátero  $ABCD$  es un trapecio isósceles, como el ángulo central del heptágono regular es  $\frac{2\pi}{7}$ , entonces:

$$\angle ADC = 2 \left( \frac{\pi - \frac{2\pi}{7}}{2} \right) = \frac{5\pi}{7} \Rightarrow \angle CAD = \frac{\pi - \frac{5\pi}{7}}{2} = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \angle BAC = \frac{4\pi}{7}$$

y como el cuadrilátero  $ABCD$  es un trapecio isósceles, resulta que:

$$\pi = \angle ADC + \angle CBA = \frac{5\pi}{7} + \angle CBA \Rightarrow \angle CBA = \frac{2\pi}{7} \Rightarrow \angle ACB = \frac{\pi}{7}$$

Además, por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el lado del heptágono tiene longitud unidad, por lo que, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo  $ABC$ , resulta que  $c = 1$  y, además:

- ☺ Como las ecuaciones de la recta paralela a  $BC$  pasando por  $A$  y de la bisectriz interior correspondiente al vértice  $B$  son:

$$\begin{cases} AD \equiv 0 = y + z \\ BD \equiv 0 = x - az \end{cases}$$

entonces, resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$D = (a : -1 : 1)$$

**Miguel-Ángel Pérez García Ortega**

# TRIÁNGULOS CABRI

## 1 al 14 de febrero de 2022

☺ Como la ecuación de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo es:

$$xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

entonces, imponiendo que el punto  $D$  está situado sobre ella, resulta que:

$$a(b^2 - a - 1) = 0 \xrightarrow{a>0} b^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = b^2 - 1$$

⊗ Como, según el Teorema del Coseno, se verifica que:

$$b^2 = a^2 + 1 - 2a \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

entonces, resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} a = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ b = 2 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \end{cases}$$

Una vez aclarado todo esto, como el polinomio de Chebyshev para  $n = 7$  es:

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

y:

$$T_7\left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right] = \cos(7\pi) = -1$$

entonces,  $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$  es una raíz de la ecuación:

$$0 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = (x + 1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2$$

es decir, es una raíz de la ecuación:

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

por lo que:

$$b^3 - b^2 - 2b + 1 = 8 \cos^3\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1 = 0$$

y, por tanto, en todos los cálculos que vamos a hacer a continuación, tendremos en cuenta los restos módulo el polinomio  $b^3 - b^2 - 2b + 1$ :

① Como:

$$O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C) = (-1 + b + b^2 : 1 - 2b - 2b^2 : 1 - b - 2b^2)$$

entonces:

$$R^2 = OA^2 = \frac{1}{(2+b)(2-b)}$$

**Miguel-Ángel Pérez García Ortega**

# TRIÁNGULOS CABRI

## 1 al 14 de febrero de 2022

y como:

$$r^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)} = \frac{(2+b)(2-b)(b-1)^2}{4}$$

resulta que:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{\frac{(2+b)(2-b)(b-1)^2}{4}}{\frac{1}{(2+b)(2-b)}}} = \frac{(2+b)(2-b)(b-1)}{4} \stackrel{b=2\cos(\frac{\pi}{7})}{=} \frac{4\cos(\frac{\pi}{7})-3}{2}$$

- ② Como, según hemos visto anteriormente,  $\cos(\frac{\pi}{7}) \neq -1$  es una raíz del polinomio:

$$T_7(x) + 1 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = (x+1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2$$

entonces, también lo es del polinomio:

$$p(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

por lo que, haciendo el cambio de variables  $y = \frac{2x+3}{4}$ , resulta que  $\frac{r}{R} = \frac{4\cos(\frac{\pi}{7})-3}{2}$  es una raíz del polinomio:

$$q(y) = 8y^3 + 28y^2 + 14y - 7 \in \mathbb{Z}[y]$$

y, por tanto,  $\frac{r}{R}$  es algebraico.

- ③ Como los coeficientes de este último polinomio no tienen factores propios comunes y su reducción módulo 2 (número primo):

$$\bar{q}(y) = 1$$

es irreducible en  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , el Criterio de Reducción nos asegura que  $q(y)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}[y]$  y, también, en  $\mathbb{Q}[y]$ , según el Lema de Gauss, lo cual significa que:

$$\mathbb{Q}\left(\frac{r}{R}\right) = \mathbb{Q}[y] / \langle 8y^3 + 28y^2 + 14y - 7 \rangle$$

es un cuerpo, por ser  $\langle 8y^3 + 28y^2 + 14y - 7 \rangle$  un ideal maximal de  $\mathbb{Q}[y]$ .

- ④ Finalmente, como  $\frac{r}{R} \neq 0$  en  $\mathbb{Q}\left(\frac{r}{R}\right)$ , entonces, es invertible en  $\mathbb{Q}\left(\frac{r}{R}\right)$  y como:

$$8\left(\frac{r}{R}\right)^3 + 28\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 14\left(\frac{r}{R}\right) - 7 = 0$$

resulta que:

$$\left[4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 14\left(\frac{r}{R}\right) + 7\right]\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{7}{2}$$

**TRIÁNGULOS CABRI**  
**1 al 14 de febrero de 2022**

y, por tanto:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{-1} = \frac{2}{7} \left[ 4 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 14 \left(\frac{r}{R}\right) + 7 \right] = \frac{2 \left[ 4 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 8 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 3 \right]}{7}$$